Der Goldene Schnitt

Mathematische Betrachtungen zu einem antiken Thema, welches bis heute aktuell geblieben ist

von

Dirk Stegmann

Universität Hildesheim
- Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung -
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

1. Die Grundlagen

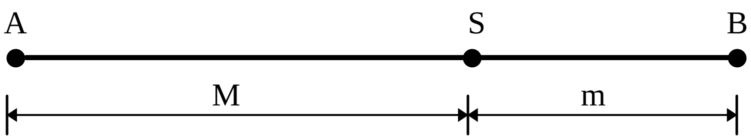
Im zweiten Buch der **Elemente** des griechischen Mathematikers EUKLID (365 - 300 v.Chr.) liest man als 11. Satz[1] die folgende Aufgabe:

Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.

Die **Elemente** bilden das älteste mathematische Werk, in dem der goldene Schnitt - in der Form dieser Aufgabe - behandelt wird.

Heute definiert man den goldenen Schnitt üblicherweise folgendermaßen:

Definition: Sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Ein Punkt S von $\overline{AB}$ teilt $\overline{AB}$ im **goldenen Schnitt**, falls sich die größere Teilstrecke zur kleineren verhält wie die Gesamtstrecke zum größeren Teil.



Die Länge der Strecke $\overline{AS}$ wird mit M bezeichnet und **Major** genannt. Entsprechend heißt die kürzere Strecke m der **Minor**.
„Maior" und „Minor" sind die lateinischen Worte für „größer" und „kleiner".

Mit diesen Bezeichnungen können wir den goldenen Schnitt wie folgt beschreiben:

Sei $\overline{AB}$ eine Strecke der Länge a. Ein Punkt S von $\overline{AB}$ teilt diese Strecke im goldenen Schnitt, falls gilt:

$$\frac{a}{M} = \frac{M}{m}$$

also genau dann, wenn $am = M^2$ gilt.

An dieser letzten Beschreibung wird deutlich, daß die eingangs zitierte Aufgabe von EUKLID tatsächlich nichts anderes als die Konstruktion des goldenen Schnitts bedeutet.

Wir können diese Formulierung auch dazu verwenden, den goldenen Schnitt „auszurechnen".

Es gilt nämlich der folgende wichtige

[1] Wir zitieren nach der Ausgabe: EUKLID: **Die Elemente**. Buch I - XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von CLEMENS THAER. Darmstadt 1991.

Satz: Genau dann teilt ein Punkt S die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt, wenn

$$\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{gilt.}$$

Beweis: Es sei a die Länge der Strecke $\overline{AB}$. Dann gilt a = M + m. Aus der Definition des goldenen Schnittes ergibt sich weiter:

S teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt

$\Leftrightarrow$ $am = M^2$ [Definition des goldenen Schnitts]

$\Leftrightarrow$ $(M + m)m = M^2$ [Einsetzen von a = M + m]

$\Leftrightarrow$ $M/m + 1 = (M/m)^2$ [Division durch m^2]

$\Leftrightarrow$ $(M/m)^2 - M/m - 1 = 0$

Diese quadratische Gleichung in der Unbekannten M/m hat die beiden Lösungen:

$$M/m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad .$$

Da M und m positiv sind, muß auch M/m positiv sein, so daß als Lösung nur

$$M/m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

in Frage kommt. Dies war die Behauptung. QED.

Bemerkung: Die Konstante $M/m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wird in der Literatur häufig mit τ bezeichnet,

also: $\tau := M/m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Wir wollen verabreden, den Ausdruck „goldener Schnitt“ großzügig zu handhaben. Er kann in dreifacher Weise gebraucht werden:

- als Bezeichnung für den Vorgang der Teilung
- als Bezeichnung für den Teilpunkt S
- als Bezeichnung für die Zahl τ selber.

Der Zahlenwert für den goldenen Schnitt τ beträgt ungefähr[2]: $\tau \approx$ **1,618**.

Als Beleg dafür, daß der goldene Schnitt häufig in der Architektur Verwendung gefunden hat, führen wir die folgenden beiden Beispiele aus der Zeit der Renaissance an:

Das erste Bild zeigt das **alte Rathaus von Leipzig**, in welchem sich übrigens auch der durch GOETHEs **Faust** berühmte „Auerbachsche Keller“ befindet.

[2] Für Zahlenenthusiasten sei dieser Wert etwas genauer angegeben:
$\tau = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354...$

Das zweite Bild stellt den **Palazzo Vecchio von Florenz** dar.

In beiden Fällen teilt der Turm die Vorderfront des Gebäudes im goldenen Schnitt, wie man leicht nachmessen kann.

Bild 1

Bild 2

2. Die Eigenschaften der goldenen Schnittzahl τ

Der goldene Schnitt τ erfüllt die Bedingungen des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz: (i) Es gilt: $\tau^2 = \tau + 1$
und für jede positive reelle Zahl mit $x^2 = x + 1$ ist umgekehrt $x = \tau$.

(ii) $1/\tau = \tau - 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(iii) $\tau + 1/\tau = \sqrt{5}$

Beweis: (i) ergibt sich unmittelbar aus dem Satz von Kapitel 1.
(ii) Multiplizieren wir die Gleichung (i) mit $1/\tau$, so ergibt sich:

$$\tau = 1 + 1/\tau \text{ und damit } 1/\tau = \tau - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

(iii) $\tau + 1/\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$. QED.

Bemerkung: Eine wichtige Konsequenz aus diesem Hilfssatz ist die bemerkenswerte Tatsache, daß alle positiven wie negativen Potenzen von τ sich als lineare Ausdrücke in τ, also in der Form $a\tau + b$ mit ganzzahligen a und b, schreiben lassen.

An späterer Stelle werden wir hierauf noch genauer eingehen.

An dieser Stelle soll folgendes Beispiel genügen:

$$\tau^3 + \tau^{-2} = \tau \cdot \tau^2 + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\tau} = \tau(\tau+1) + (\tau-1)^2 = 2\tau^2 - \tau + 1$$
$$= 2(\tau+1) - \tau + 1 = \tau + 3.$$

Wir fassen alle wichtigen Eigenschaften des goldenen Schnittes in folgendem Satz zusammen:

Satz: Eine Strecke $\overline{AB}$ habe die Länge a, und S sei ein Punkt dieser Strecke. Wenn wir mit M die Länge von $\overline{AS}$ und mit m die von $\overline{SB}$ bezeichnen, dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:
(1) S teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt.
(2) $M/m = \tau$.
(3) $(M/m)^2 = M/m + 1$
(4) $a/M = \tau$
(5) $a/m = \tau + 1$

Beweis: Die Gleichwertigkeit von (1) und (2) ist die Aussage des Satzes von Kapitel 1.

Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt direkt aus dem Teil (i) unseres Hilfssatzes:
Falls $M/m = \tau$ ist, dann gilt nach (i): $(M/m)^2 = \tau^2 = \tau + 1 = M/m + 1$.
Falls umgekehrt $(M/m)^2 = M/m + 1$ gilt, so hat man mit x: = M/m die Gleichung $x^2 = x + 1$ und damit nach Hilfssatz (i) $x = \tau = M/m$.

(1) $\Leftrightarrow$ (4): Nach Definition ist (1) genau dann wahr, wenn $am = M^2$ gilt.
Wegen $a = M + m$ erhalten wir:

$$\begin{array}{lll} & am = M^2 & \\ \Leftrightarrow & a(a - M) = M^2 & \text{[Einsetzen von } m = a - M\text{]} \\ \Leftrightarrow & a^2 = M^2 + aM & \\ \Leftrightarrow & (a/M)^2 = a/M + 1 & \text{[Division durch } M^2\text{]} \\ \Leftrightarrow & a/M = \tau & \text{[Nach Hilfssatz (i)]} \end{array}$$

(1) $\Leftrightarrow$ (5):

$$\begin{array}{lll} & M^2 = am & \\ \Leftrightarrow & (a - m)^2 = am & \text{[Einsetzen von } M = a - m\text{]} \end{array}$$

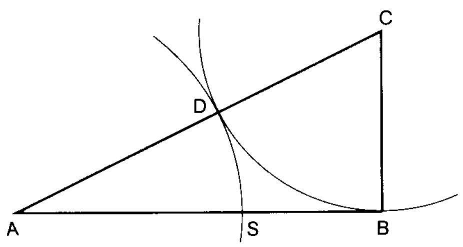
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a-m}{m}\right)^2 = \frac{a}{m} = \frac{a-m}{m} + 1 \quad \text{[Division durch } m^2\text{]}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a-m}{m} = \tau \quad \text{[Hilfssatz (i)]}$$

$$\Leftrightarrow \quad a/m = \frac{a-m}{m} + 1 = \tau + 1 \quad \text{QED.}$$

3. Die Konstruktion des goldenen Schnittes

Der goldene Schnitt läßt sich mit Zirkel und Lineal leicht konstruieren, wie man der folgenden Figur entnimmt:



Es sei $\overline{AB}$ eine Strecke der Länge a. In B errichte man die Senkrechte $\overline{BC}$ der Länge a/2, also |BC| = a/2 und $\overline{BC} \perp \overline{AB}$.
Der Kreis um C mit Radius |CB| schneidet $\overline{AC}$ in einem Punkt D.
Der Kreis um A mit Radius |AD| schneidet schließlich $\overline{AB}$ im goldenen Schnittpunkt S.

Daß diese Konstruktion tatsächlich den goldenen Schnitt liefert, sieht man schnell ein:

Nach dem *Satz des Pythagoras* ist
$|AC| = a\frac{\sqrt{5}}{2}$.

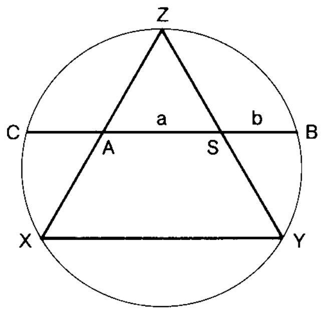
Auf Grund der Konstruktion gilt $|CD| = |CB| = \frac{a}{2}$, so daß wir haben:

$$|AS| = |AD| = |AC| - |CD| = a\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} = \frac{a}{\tau}.$$

Also: $\frac{|AB|}{|AS|} = a/(a/\tau) = \tau$ QED.

Es gibt mehrere Methoden, mit Zirkel und Lineal den goldenen Schnitt zu konstruieren.

Wir wollen hier nur noch eine Konstruktion erwähnen, die interessanterweise EUKLID noch nicht kannte, sondern erst 1982 von GEORGE ODOM angegeben wurde:



Das Dreieck ΔXYZ sei ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2a.
A und S seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{XZ}$ und $\overline{YZ}$.
Die Mittelparallele SA möge den Umkreis in den Punkten C und B schneiden.

Dann gilt: S teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt.

Beweis: Nach Konstruktion ist $|YS| = |SZ| = a$. Aus dem *2. Strahlensatz* ergibt sich dann: $|AS| = a$.
Mit b sei die Länge der Strecke $\overline{SB}$ bezeichnet. Dann ist aus Symmetriegründen auch $|AC| = b$.
Wir betrachten nun die beiden Sehnen $\overline{YZ}$ und $\overline{BC}$, die sich in S schneiden.
Nach dem *Sehnensatz* ergibt sich

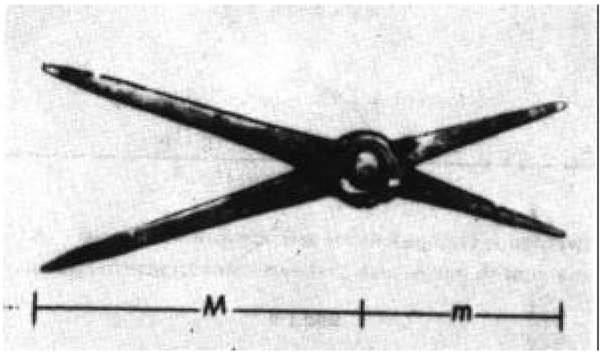
$$a^2 = |SY| \cdot |SZ| = |SB| \cdot |SC| = b(a + b)$$

$\Rightarrow$ $(a/b)^2 = a/b + 1$ [Division durch b^2]

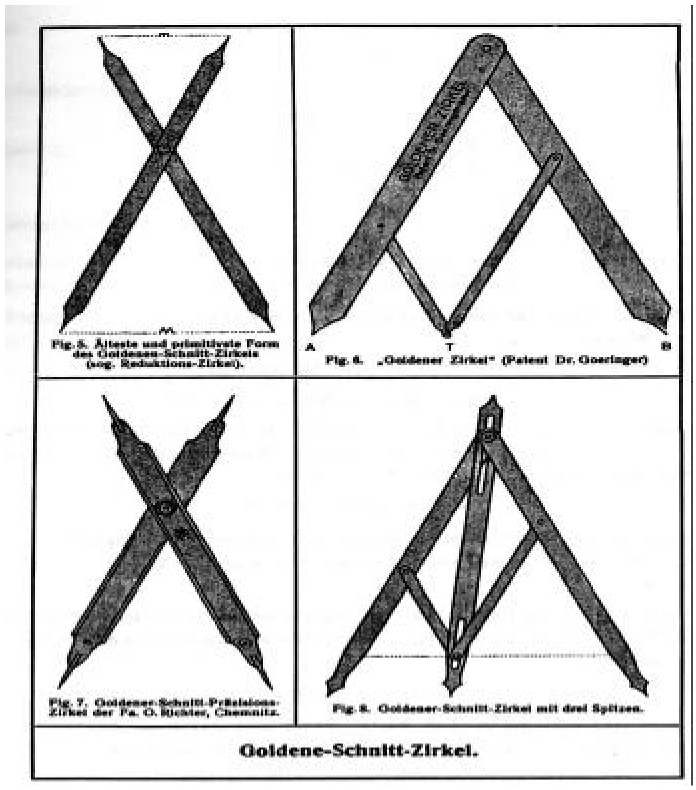
$\Rightarrow$ $a/b = \tau$ [Satz aus Kapitel 2] QED.

4. Der goldene Zirkel

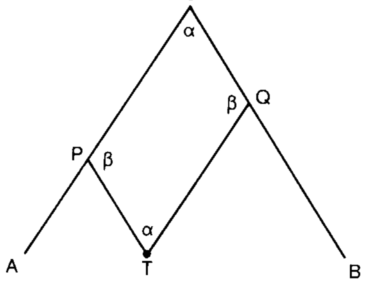
Es gibt mechanische Instrumente, mit deren Hilfe man den goldenen Schnitt einer Strecke bestimmen kann. Auf diese Weise läßt sich natürlich auch nachprüfen, ob ein vorgefundener Punkt eine gegebene Strecke tatsächlich im goldenen Schnitt teilt.
Goldene Zirkel fanden beispielsweise im Schreinerhandwerk in Altertum und Mittelalter häufig Verwendung.
Das einfachste Modell ist sicherlich der sog. **Reduktionszirkel**, der aus zwei gleichlangen Stäben besteht, die in dem Punkt, der beide Stäbe im goldenen Schnitt teilt, beweglich aneinander befestigt sind.
Einen antiken Vorläufer dieses Zirkels hat man bei Ausgrabungen in Pompeji gefunden.



Nach dem *2. Strahlensatz* stellt sich auf der einen Zirkelseite ein Major und auf der anderen der zugehörige Minor ein.
Die folgenden vier Modelle entstammen einem 1919 erschienen Buch[3] über unser Thema.



Interessant ist der Zirkel oben rechts, den wir durch eine Zeichnung schematisieren wollen:



[3] R. ENGELHARDT: Der Goldene Schnitt im Buchgewerbe. Leipzig 1919.

Dieser Zirkel ist so konstruiert, daß
(i) die Punkte P und Q die gleichlangen Schenkel $\overline{AS}$ und $\overline{SB}$ im goldenen Schnitt teilen, und
(ii) |PT| = |PA| sowie |QT| = |QB| gilt.

Zur Abkürzung setzen wir a für die Länge der Schenkel $\overline{AS}$ bzw. $\overline{SB}$. Dann ist

$$|SP| = |QB| = |TQ| \text{ und } |SQ| = |PA| = |PT|.$$

Insbesondere ist also SPTQ ein Parallelogramm. Sei α der Winkel bei S, dann hat auch der Winkel bei T die Größe α. Da die Winkelsumme in jedem Viereck 360° beträgt[4], ergibt sich die Größe des Winkels β im Parallelogramm bei P und Q als $\beta = (360° - 2\alpha)/2 = 180° - \alpha$.
Der Winkel APT hat als Nebenwinkel des Winkels β die Größe $180° - \beta = \alpha$.
Analog gilt: Winkel TQB = α . Da ferner |AP| = |PT| und |TQ| = |QB|, sind die beiden gleichschenkligen Dreiecke ΔAPT und ΔTQB ähnlich.
Bezeichne γ die Größe des Basiswinkels eines dieser beiden Dreiecke, dann gilt
$\gamma + \gamma + \alpha = 180°$, da die Winkelsumme in jedem ebenen Dreieck 180° beträgt.
Hieraus folgt: Die Summe der drei Winkel ATP, PTQ und QTB ist gleich 180°.
Erst aus dieser Erkenntnis ergibt sich, daß die drei Punkte A, T, B wirklich auf einer Geraden liegen.
Hieraus ergibt sich wegen $|AP| = |AS|/(\tau + 1) = a/(\tau + 1) = a/\tau^2$
[Kapitel 2, Satz (5) und Hilfssatz (i)] und $|QB| = |SB|/\tau = a/\tau$ [Kapitel 2, Satz (4)]
die Behauptung $|TB|/|AT| = |QB|/|AP| = \tau$ [Ähnlichkeit der Dreiecke]. QED.

Dieser Zirkel zeigt also wirklich Major und Minor an.

[4] Jedes Viereck läßt sich ja in zwei Dreiecke zerlegen, deren Winkelsumme jeweils 180° beträgt.

5. Das reguläre Fünfeck und der goldene Schnitt

Besonders eindruckvoll tritt der goldene Schnitt bei *regulären Fünfecken* in Erscheinung.

EUKLID führt in seinen **Elementen** den goldenen Schnitt vor allem aus dem Grund ein, um mit seiner Hilfe, das reguläre Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren zu können.

Es gilt historisch als gesichert, daß den Pythagoräern im 5. vorchristlichen Jahrhundert der goldene Schnitt bereits bekannt war.

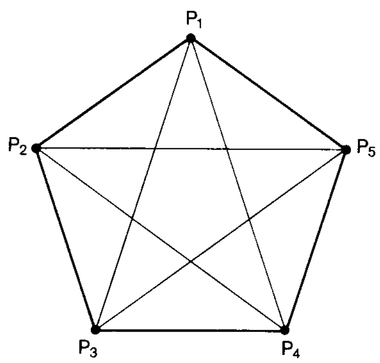
So schreibt der antike Historiker IAMBLICHOS VON CHALKIS (ca. 285 - 330), der Pythagoräer HIPPASOS VON METAPONT - er lebte um 450 v.Chr. und soll ein unmittelbarer Schüler des Pythagoras gewesen sein - habe am regulären Fünfeck, dem Ordenszeichen der Pythagoräer, den goldenen Schnitt entdeckt. Ferner sei ihm die Inkommensurabilität, d.h. die Irrationalität, von Seite und Diagonale am regulären Fünfeck klargeworden.
Diese Entdeckung habe er öffentlich bekanntgemacht, wofür er von den Göttern bestraft wurde und bei einem Schiffsunglück im offenen Meer ertrank.[5]

Interessant ist hieran, daß die Griechen die **Irrationalität** offensichtlich nicht an der Diagonale eines Quadrats entdeckt haben, wie man vermuten sollte, sondern an der Diagonale einer komplizierteren Figur, eben des regulären Fünfecks.

Bevor wir zum eigentlichen Satz dieses Paragraphen kommen, sind einige kleine Vorüberlegungen und Begriffsklärungen notwendig.

Definition:	Ein konvexes n-Eck heißt **regulär**, falls alle seine Seiten die gleiche Länge haben und alle Innenwinkel gleich groß sind. Man nennt hierbei ein n-Eck **konvex**, wenn es die Eigenschaft hat, daß die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte im Innern der Figur selber ganz im Innern liegt.

Beispiel: Ein konvexes Viereck ist genau dann regulär, wenn es ein Quadrat ist. Entsprechend ist ein Dreieck (es ist trivialerweise immer konvex) genau im Falle der Gleichseitigkeit regulär.



reguläres Fünfeck

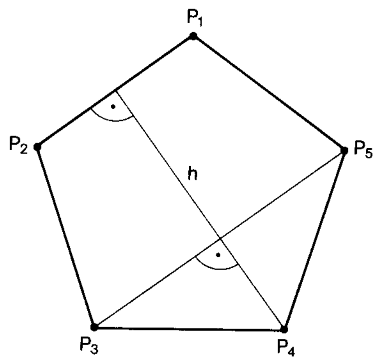
[5] Vgl. IAMBLICHOS: Pythagoras. Legende, Lehre, Lebensgestaltung. Artemis Verlag. Zürich/Stuttgart 1963.

Hilfssatz: Sei $F = P_1P_2P_3P_4P_5$ ein reguläres Fünfeck. Dann gilt:
(i) Die Größe eines jeden Innenwinkels beträgt 108°.
(ii) Alle Diagonalen haben dieselbe Länge.
(iii) Jede Seite ist parallel zu der ihr „gegenüberliegenden“ Diagonalen.

Beweis: (i) Jedes beliebige n-Eck läßt sich in n - 2 Dreiecke zerlegen, so daß seine Winkelsumme $(n - 2) \cdot 180°$ beträgt. Ein Fünfeck hat demzufolge eine Winkelsumme von 540°. Da F regulär ist, hat jeder Innenwinkel die gleiche Größe, also $540°/5 = 108°$.

(ii) Aus Symmetriegründen ergibt sich sofort, daß zwei Diagonalen, die eine Ecke von F gemeinsam haben, gleich lang sind. Der Rest folgt durch Induktion: Wegen jeweils einer gemeinsamen Ecke gelten die Gleichungen:
$|P_1P_3| = |P_1P_4|$ und $|P_4P_1| = |P_4P_2|$ und $|P_2P_4| = |P_2P_5|$ und $|P_5P_2| = |P_5P_3|$ und $|P_3P_5| = |P_3P_1|$. Da der Abstand zweier Punkte A und B stets symmetrisch ist, d.h. $|AB| = |BA|$ immer gilt, folgt die Längengleichheit aller Diagonalen.

(iii) O.B.d.A.[6] reicht es, die Behauptung für eine Seite, sagen wir für $\overline{P_1P_2}$, zu zeigen.



Das Lot h von P_4 auf $\overline{P_1P_2}$ ist eine Symmetrieachse von F. Daher stehen sowohl $\overline{P_1P_2}$ als auch $\overline{P_3P_5}$ senkrecht auf h und sind daher parallel. QED.

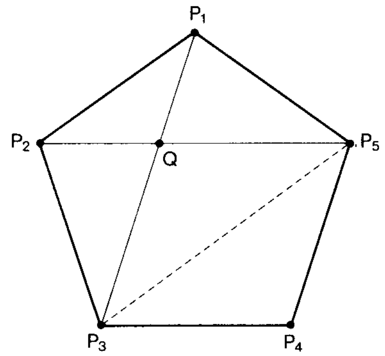
Jetzt können wir den folgenden wichtigen Satz beweisen, der für die alten Griechen offenbar den Ausgangspunkt ihrer Beschäftigung mit dem goldenen Schnitt gebildet hat.

Satz: Sei $F = P_1P_2P_3P_4P_5$ ein reguläres Fünfeck. Dann gilt:

(i) Je zwei Diagonalen, die sich nicht in einer Ecke von F schneiden, teilen einander im goldenen Schnitt.

(ii) Das Verhältnis der Länge einer Diagonalen zur Länge der Seite ist τ .

[6] Diese Abkürzung, die man in der Mathematik häufig verwendet, bedeutet: *„ohne Beschränkung der Allgemeinheit“*. Man hat sich bei ihrem Gebrauch stets zu überlegen, **warum** man die Allgemeingültigkeit bei Betrachtung des jeweils gewählten speziellen Falles nicht verletzt. Warum kann man sich hier beim Beweis auf die spezielle Seite $\overline{P_1P_2}$ als **pars pro toto** beschränken ?



Beweis: (i) Wir betrachten den Schnittpunkt Q der Diagonalen $\overline{P_1P_3}$ und $\overline{P_2P_5}$.
Da gemäß Hilfssatz (iii) $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_5}$ parallel sind, ergibt sich mit Hilfe des 2. Strahlensatzes:

$$|QP_3|/|QP_1| = |P_3P_5|/|P_1P_2|.$$

Aus der Regularität des Fünfecks ergibt sich weiter $|P_1P_2| = |P_4P_5|$ und gemäß Hilfssatz (ii) ist $|P_3P_5| = |P_1P_3|$, so daß wir erhalten

$$|QP_3|/|QP_1| = |P_1P_3|/|P_4P_5|.$$

Wir haben also nur noch zu zeigen: $|P_4P_5| = |QP_3|$. Hierzu weisen wir nach, daß das Viereck $QP_3P_4P_5$ ein Parallelogramm ist.

Gemäß Hilfssatz (iii) gilt aber $\overline{P_4P_5} \parallel \overline{P_1P_3}$ und daher auch $\overline{P_4P_5} \parallel \overline{QP_3}$.
Analog folgt aus $\overline{P_3P_4} \parallel \overline{P_2P_5}$ auch $\overline{P_3P_4} \parallel \overline{QP_5}$.

Das Viereck $QP_3P_4P_5$ ist also tatsächlich ein Parallelogramm, so daß insbesondere $|P_4P_5| = |QP_3|$ gilt und wir erhalten

$$|QP_3|/|QP_1| = |P_1P_3|/|P_4P_5| = |P_1P_3|/|QP_3|,$$

also die Verhältnisgleichung, die den goldenen Schnitt definiert.

(ii) Gemäß (i) ist $|P_1P_3|/|QP_3| = \tau$,
und nach dem soeben Bewiesenen gilt $|QP_3| = |P_4P_5|$, so daß insgesamt $|P_1P_3|/|P_4P_5| = \tau$ folgt.

QED.

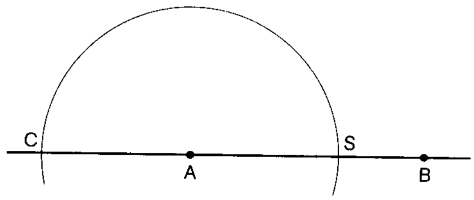
Es erhebt sich nun die naheliegende Frage, wie man eigentlich ein reguläres Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruiert, sofern es denn überhaupt möglich ist.
EUKLID beschäftigt sich im vierten Buch (Aufgabe 11) seiner **Elemente** mit diesem Thema. Er zeigt, daß dieses Problem lösbar ist und gibt eine derartige Konstruktion an.
Als entscheidend erweist sich hierbei die Erkenntnis, daß man zunächst ein goldenes Dreieck zu konstruieren hat. Wir wollen im nächsten Kapitel hierauf kurz eingehen.

6. Das goldene Dreieck und die Konstruktion regulärer Fünfecke

Definition:	Ein Dreieck heißt **golden**, falls es gleichschenklig ist und sich die Länge eines Schenkels zur Länge der Grundseite verhält wie $\tau : 1$.

Ein goldenes Dreieck hat also die Seitenlängen a, τa, τa.

Ist die Seitenlänge a: = |AB| gegeben, dann läßt sich τa leicht folgendermaßen konstruieren:



Zunächst wird der Punkt S, der die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt, gemäß Kapitel 3 konstruiert. Dann zeichnet man den Halbkreis um A mit Radius |AS|, der die Gerade durch A und B im Punkt C schneiden möge. Dann gilt die

Behauptung:	$\lvert CB\rvert = \tau\lvert AB\rvert = \tau a$, d.h. A teilt $\overline{BC}$ im goldenen Schnitt.

Beweis: Da S die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt, ergibt sich

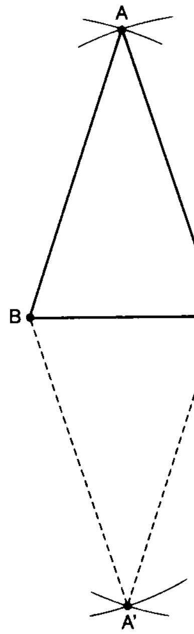
$$|AC| = |AS| = |AB|/\tau.$$

Hieraus folgt

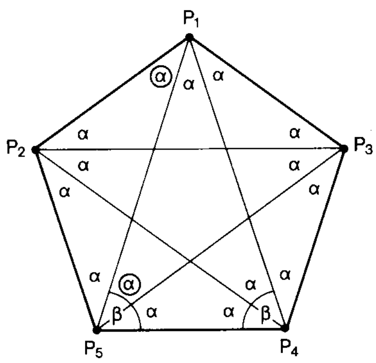
$$|BA|/|AC| = |BA|/(|AB|/\tau) = \tau$$

und damit die Behauptung gemäß Kapitel 2, Satz (2). QED.

Goldene Dreiecke lassen sich also mit dieser Methode recht einfach mit Zirkel und Lineal konstruieren: Zu einer gegebenen Strecke $\overline{BC}$ der Länge a konstruiert man, wie soeben beschrieben, eine Strecke der Länge τa. Die Kreise mit diesem Radius τa um B und C schneiden sich in den Punkten A und A' , so daß sowohl ΔABC als auch $\Delta A'BC$ goldene Dreiecke sind, deren Grundseite $\overline{BC}$ die Länge a hat.



In jedem regulären Fünfeck finden sich nun stets fünf kongruente goldene Dreiecke. Ist z.B. $F = P_1P_2P_3P_4P_5$ ein solches reguläres Fünfeck, dann ist z.B. das Dreick $\Delta P_1P_5P_4$ ein goldenes, da nach dem Satz (ii) des letzten Kapitels jede Diagonale von F das τ-fache der Seitenlänge von F ist.



Ein reguläres Fünfeck mit der Seitenlänge a kann also zusammengesetzt werden aus einem goldenen Dreieck (z.B. $\Delta P_1P_5P_4$) und zwei jeweils gleichschenkligen Dreiecken mit den Seitenlängen a, a, τa (z.B. $\Delta P_1P_3P_4$ und $\Delta P_1P_2P_5$).
Hat man also erst einmal das goldene Dreieck mit Basislänge a konstruiert, so ist der Rest einfach: Die noch fehlenden Punkte P_2 und P_3 erhält man, indem man um P_1 und P_5 sowie um P_1 und P_4 Kreise mit dem Radius a zeichnet. Deren Schnittpunkte sind die Eckpunkte P_2 und P_3.

Da man also ein goldenes Dreieck konstruieren kann, lassen sich auch die Innenwinkel dieses Dreiecks mit Zirkel und Lineal konstruieren; sie betragen 36° und 72°. Dies ist keinesfalls selbstverständlich, sondern eine Folgerung aus dem

Satz: Die Basiswinkel eines goldenen Dreiecks haben die Größe 72°, während der Winkel an der Spitze die Größe 36° hat.

Umgekehrt ist jedes Dreieck, dessen Winkel die Größen 72°, 72°, 36° haben, ein goldenes.

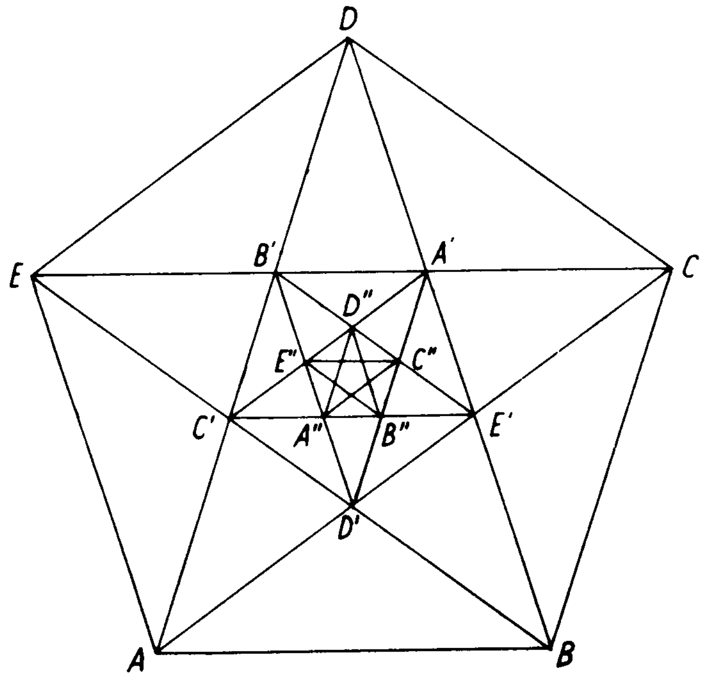
Beweis: Wir zeigen, daß die Basiswinkel β genau doppelt so groß sind wie der Winkel α an der Spitze. Dann haben wir nämlich $5\alpha = 180°$ [Betrachte z.B. $\Delta P_1P_5P_4$], folglich $\alpha = 36°$ und $\beta = 2\alpha = 72°$.

Hierzu denken wir uns das goldene Dreieck in ein reguläres Fünfeck $F = P_1P_2P_3P_4P_5$ eingebettet. Aus Symmetriegründen haben dann die folgenden fünf Winkel den gleichen Wert α: $\angle P_4P_1P_5$, $\angle P_3P_2P_4$, $\angle P_1P_5P_3$, $\angle P_2P_4P_1$, $\angle P_5P_3P_2$.
Da nun die beiden Geraden P_1P_2 und P_3P_5 parallel sind [Kapitel 5, Hilfssatz (iii)], sind die Winkel $\angle P_1P_5P_3$ und $\angle P_5P_1P_2$ als Stufenwinkel gleich, d.h. es gilt auch $\angle P_5P_1P_2 = \alpha$. Analog zeigt man, daß auch alle anderen Winkel an den fünf Ecken unseres regulären Fünfecks in der Figur den Wert α haben, so daß sofort $\beta = 2\alpha$ folgt.

Hat umgekehrt ein weiteres Dreieck die gleichen Innenwinkel wie ein goldenes, so ist es zu diesem ähnlich, es gelten also die gleichen Seitenverhältnisse, d.h. es ist auch ein goldenes.

QED.

Anmerkung: Betrachtet man die fünf Schnittpunkte der Diagonalen im regulären Fünfeck, so bilden diese wieder ein reguläres Fünfeck im Innern des Ausgangsfünfecks.
Beide Fünfecke stehen im Seitenverhältnis des goldenen Schnittes.
Betrachtet man das innere Fünfeck und die Schnittpunkte seiner Seiten, also die Eckpunkte des äußeren Ausgangsfünfecks, dann erhält man ein **Sternfünfeck**, das sog. **Pentagramm**.
Man erhält wiederum ein Pentagramm, das um den Faktor des goldenen Schnittes vergrößert ist, wenn man die Seiten des Ausgangsfünfecks verlängert, bis sie sich schneiden, und so fort.
Man hat also auf diese Weise eine unendliche Folge von um den Faktor τ wachsenden Pentagrammen.



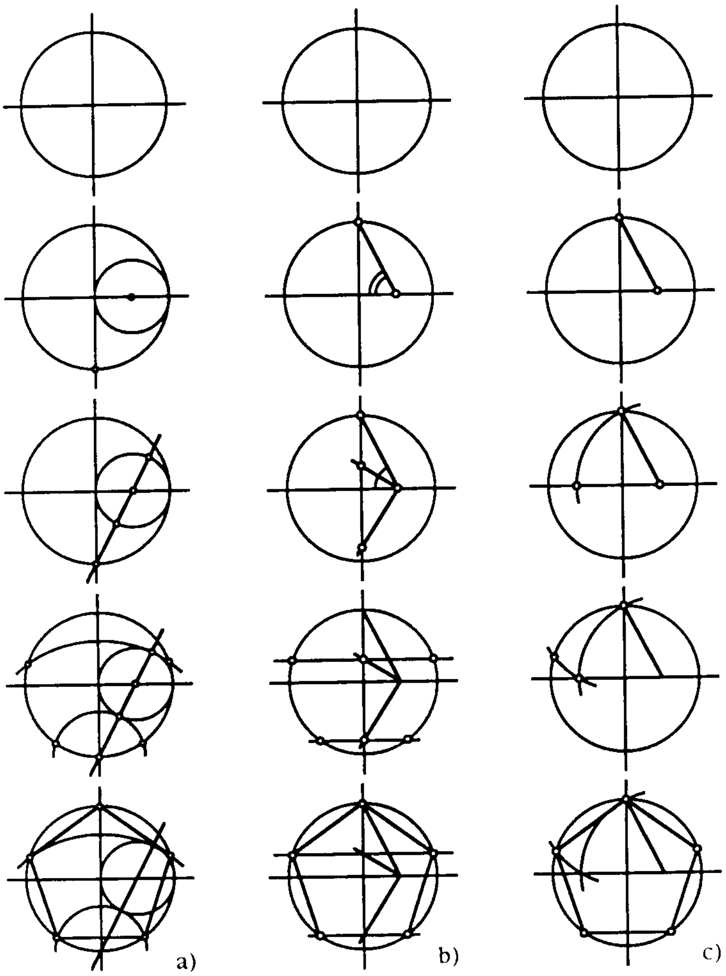
Das Pentagramm diente den Pythagoräern - wie schon erwähnt - als Ordenszeichen ihrer Bruderschaft und spielte daher bei ihnen eine wichtige Rolle. So ist es nicht verwunderlich, wenn sie sich mit seinen Längenverhältnissen befaßt haben und auf diese Weise auf den goldenen Schnitt und seine Konstruktion gestoßen sind.

Über die geheimnisvollen Kräfte und Eigenschaften, die man dem Pentagramm seit den Zeiten der Pythagoräer bis in die Neuzeit zuschrieb, berichtet beispielsweise der große Brockhaus von 1896 unter dem Stichwort **Drudenfuß:**

> **Drudenfuß**, Trudenfuß, Drudenkreuz, Alpfuß, Alpkreuz, Maarfuß, Pentagramm, in der Heraldik Pentalpha, eine aus zwei ineinander verschränkten gleichschenkligen Dreiecken (ohne Basis) gebildete fünfeckige Figur. Die Figur ist zeichnerisch in einem Zuge ausführbar. Der Ursprung
> dieses mystischen Zeichens verliert sich in das Altertum. Unter den geheimnisvollen Zahlen und Figuren
> der Pythagoräer findet es sich als Zeichen der Gesundheit. Aus der Schule der Philosophen ging es in
> das gewöhnliche Leben über. Häufig erscheint das Pentagramm auf griechischen Münzen. Eine hohe Bedeutung erhielt es auch bei den verschiedenen gnostischen Sekten [...]. Im Mittelalter wurde es bei den Zauberformeln gebraucht und sollte eine Herrschaft über die Elementargeister ausüben (vgl.
> auch Goethes „Faust“ I, Beschwörungsszene). Häufig war es auch das Abzeichen geheimer Gesellschaften.

Drudenfuß wurde es genannt, weil man sich seiner gegen Hexen oder Druden[7] bediente, und noch gegenwärtig [1894] gebraucht der Aberglaube dieses Zeichen, um die Hexen von den Viehställen, Türschwellen, Wiegen, Betten usw. abzuhalten.

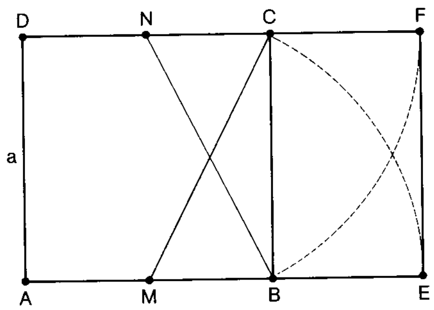
Aufgabe: Man überlege sich, warum die in der folgenden Abbildung angedeuteten drei Konstruktionen wirklich ein reguläres Fünfeck liefern.



[7] **Druden** (Truden), im altdeutschen Volksglauben weibliche Nachtgeister, die die Schlafenden ängstigten, Kinder und Haustiere schädigten und allerlei bösen Zauber trieben, gegen den der Drudenfuß oder auch der Drudenstein, d.i. ein im Wasser rund geriebener Kalkstein mit seinem natürlichen durchgehenden Loch, auch ein Hufeisen, ein Besen vor oder das Kreuzzeichen über der Tür als Schutzmittel dienten. [Brockhaus, 1896].

7. Das goldene Rechteck und goldene Geometrie

Definition:	Ein Rechteck wird **golden** genannt, falls sich die Längen seiner Seiten verhalten wie $\tau : 1$.



Die Konstruktion eines goldenen Rechtecks ist leicht folgendermaßen möglich:

Sei ABCD ein Quadrat. Der Kreis um den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ mit Radius |MC| schneidet die Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ in einem Punkt E. Entsprechend schneidet der Kreis um den Mittelpunkt N von $\overline{DC}$ die Verlängerung von $\overline{DC}$ auf der Seite von E in einem Punkt F.

Behauptung:	AEFD ist ein goldenes Rechteck.

Beweis: Wir haben zu zeigen: $\overline{AE}$ wird von B im goldenen Schnitt geteilt.
Es sei a: = |AB| die Seitenlänge des Quadrats. Dann gilt:
$|ME| = |MC| = a\frac{\sqrt{5}}{2}$ [Pythagoras].
Also ist $|AE| = |AM| + |ME| = \frac{a}{2} + a\frac{\sqrt{5}}{2} = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a \cdot \tau$ QED.

Bemerkung: Aus der Konstruktion des goldenen Rechtecks AEFD ergibt sich bei Betrachtung des kleineren Rechtecks BEFC sofort:
Dieses „abgespaltene" Rechteck hat die Seitenlängen a und τa - a, so daß sein Seitenverhältnis die Größe $\frac{a}{a(\tau-1)} = \frac{1}{\tau-1} = \tau$ [Kapitel 2, Hilfssatz (ii)] hat.
Das kleinere abgespaltene Rechteck BEFC ist also wiederum ein goldenes.

Wir haben somit die

Aussage:	Jedes goldene Rechteck hat die Eigenschaft, daß nach Abspaltung eines größtmöglichen Quadrats wieder ein goldenes Rechteck übrigbleibt.

Es gilt darüberhinaus die **Umkehrung:** Hat ein Rechteck diese Eigenschaft, bei Abspaltung eines größtmöglichen Quadrats ein goldenes Rechteck übrigzulassen, so ist es selbst ein goldenes.

Beweis: Ein derartiges Rechteck habe die Seitenlängen a und b mit a > b. Dann gilt:
Wenn x die Seite des abgespaltenen Quadrats bezeichne, hat man:

$x = b$ und $\frac{b}{a-x} = \frac{b}{a-b} = \tau$, woraus folgt: $a\tau = b + b\tau = b(1 + \tau)$, so daß $\frac{a}{b} = \frac{1+\tau}{\tau} = 1 + \frac{1}{\tau} = \tau$ [Kapitel 2, Hilfssatz (ii)] gilt. QED.

Wir haben also insgesamt den folgenden Satz bewiesen:

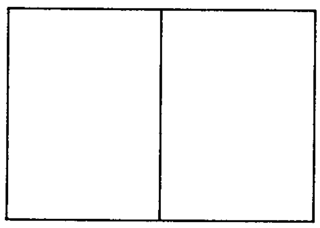
Satz 1: Ein Rechteck ist genau dann ein goldenes, wenn es die Eigenschaft hat, nach Abspaltung eines größtmöglichen Quadrats ein ähnliches, also eines mit gleichem Seitenverhältnis, übrigzulassen.

Man kann also diese Eigenschaft als **definierende Eigenschaft** eines goldenen Rechtecks verwenden.

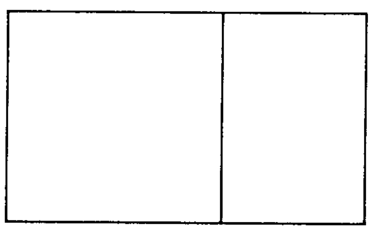
Das goldene Rechteck scheint unser ästhetisches Empfinden sehr zu befriedigen, gilt es doch gemeinhin als besonders „schön“. Man findet es daher an vielen Bauwerken und Gemälden.

Das **DIN-A-Format** hat jedoch - obwohl man es meinen könnte - mit dem goldenen Schnitt nichts zu tun. Seine definierende Eigenschaft ist, bei Halbierung wieder ein DIN-A-Format entstehen zu lassen, so daß man hier die Verhältnisgleichung $a : b = b : \frac{a}{2}$ hat, die mit $a^2 = 2b^2$ gleichbedeutend ist und $a = b\sqrt{2} \approx 1{,}414 \cdot b$ impliziert.

Wie man spätestens dann weiß, wenn man bei einem Computer-Schreib-Programm seine Seite einrichtet, ist bei einem DIN-A4-Blatt b = 21 cm und damit a = 29,699 cm $\approx$ 30 cm.



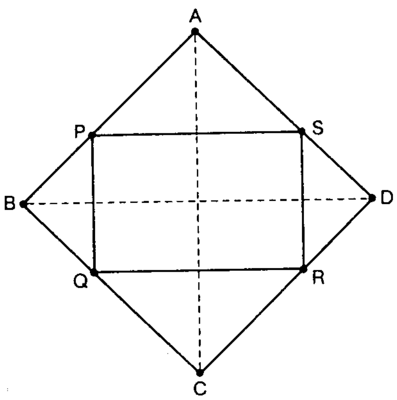
DIN A-Format



Goldenes Rechteck

Recht interessant ist die folgende Aussage:

Satz 2: In ein gegebenes Quadrat ABCD läßt sich ein goldenes Rechteck so einbeschreiben, daß seine Ecken die Seiten des Quadrats im goldenen Schnitt teilen.



Beweis: Wir teilen die Seiten des Quadrats ABCD durch die Punkte P, Q, R, S jeweils im goldenen Schnitt. Nun müssen wir uns zunächst davon überzeugen, daß PQRS tatsächlich ein Rechteck ist. Dies folgt aber sofort aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes: Da nach Konstruktion $|AB|/|AP| = |AD|/|AS|$ gilt, folgt $\overline{PS} \parallel \overline{BD}$. Analog folgt bei Betrachtung der von C ausgehenden Strahlen: $\overline{QR} \parallel \overline{BD}$, insbesondere also $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$. Betrachtet man noch B und D als Strahlenzentren, ergibt sich auf die gleiche Weise: $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$. Somit ist PQRS schon einmal als Parallelogramm erkannt.
Da nun aber seine Seiten- eben wegen der Umkehrung des Strahlensatzes - auch parallel zu den Diagonalen des Quadrats ABCD sind und diese bekanntlich aus Symmetriegründen senkrecht aufeinander stehen, muß das Parallelogramm PQRS ein Rechteck sein.
Daß PQRS darüberhinaus auch noch golden ist, erkennt man aus der Tatsache, daß z.B. die beiden Dreiecke ΔAPS und ΔBQP aufgrund gleicher Innenwinkel ähnlich sind, denn hieraus ergibt sich $\frac{|PS|}{|PQ|} = \frac{|AP|}{|BP|} = \tau$ nach Konstruktion

QED.

Wir kommen noch einmal auf das **Abspalten von Quadraten** - wie bei Satz 1 - zurück.

Die Pythagoräer haben bekanntlich die Existenz des **Irrationalen**[8] in der Mathematik entdeckt, und zwar, wie man vermutet, nicht am Verhältnis der Quadratdiagonalen zur Seite, sondern gerade am goldenen Schnitt[8]. Die Methode, die sie hierfür wahrscheinlich benutzt haben,

---

[8] Das Wort **„irrational“** in diesem Zusammenhang beruht auf einer schlechten Übersetzung aus dem Griechischen: *a l ogoz* bedeutet eher: *unaussprechbar*. Die lateinische Übersetzung *inkommensurabel,* also *unmeßbar,* kommt dem schon wesentlich näher.
[8] Vgl. J. TROPFKE: Geschichte der Elementarmathematik. Band 1, Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Berlin. 1980. S. 132.

beruht auf dem sog. *euklidischen Algorithmus*, der in den §§1 und 2, Buch VII von EUKLIDs **Elementen** beschrieben wird.

Wir wollen dieses Verfahren - in seinem geometrischen Gewand - kurz erläutern.
Mit Hilfe dieses Algorithmus läßt sich der **größte gemeinsame Teiler** zweier natürlicher Zahlen a und b - wir schreiben ggT(a,b) - sehr schnell berechnen.

Zunächst wird ermittelt, wie oft b in a enthalten ist, indem man a durch b dividiert und den Rest, der kleiner als b ist, ermittelt. Im zweiten Schritt wird b durch diesen Rest dividiert und der neue Rest ermittelt. In jedem weiteren Schritt wird der alte Rest durch den neuen Rest dividiert. Dieses Verfahren wird solange fortgeführt, bis die Division „aufgeht“, d.h. bis kein Rest mehr übrigbleibt. Der letzte von Null verschiedene Rest ist dann der größte gemeinsame Teiler von a und b.

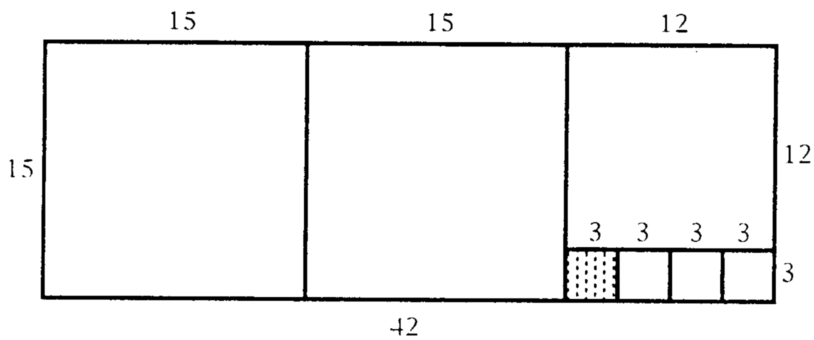
Wir nehmen uns ein **Beispiel** vor: Sei a = 42 und b = 15.

Dann liefert der **euklidische Algorithmus:**
42 : 15 = 2 Rest 12
15 : 12 = 1 **Rest 3**
12 : 3 = 4 Rest 0.

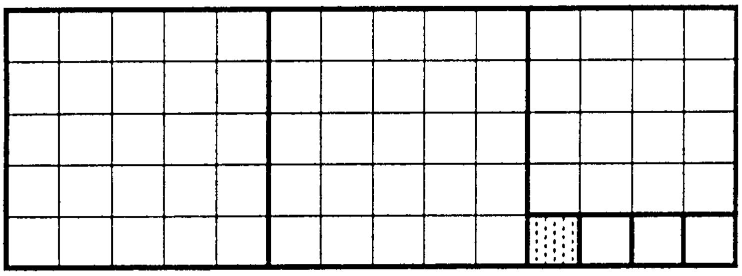
Es ist also ggT(42, 15) = 3.

Geometrisch läßt sich das Verfahren folgendermaßen darstellen:

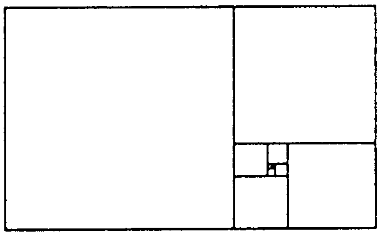
Von einem Rechteck der Seitenlängen a und b (a > b) werden Quadrate der Seitenlänge b abgeschnitten, solange es geht. Dann bleibt ein Restrechteck übrig, von welchem wieder Quadrate abgeschnitten werden und so weiter. Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis das Zerlegen in Quadrate aufgeht, das heißt, kein Rechteck mehr übrigbleibt. Die Seitenlänge des kleinsten Quadrats ist dann der größte gemeinsame Teiler von a und b:



Da somit diese kleinste Quadratseite - hier mit der Länge 3 - ein gemeinsames Maß (sogar das größte) der ursprünglichen Rechteckseiten a und b ist, kann nun das ganze Rechteck in Quadrate dieser Größe unterteilt werden, d.h. a und b sind kommensurabel (ihr Verhältnis ist eine rationale Zahl):



Wenden wir nun den euklidischen Algorithmus auf das **goldene Rechteck** mit den Seitenlängen $a = \tau$ und $b = 1$ an, so bricht das Verfahren nie ab, da ja gemäß Satz 1 - immer nach Abschneiden eines Quadrats jeweils ein zum Ausgangsrechteck ähnliches Rechteck übrigbleibt. Die Seitenlängen τ und 1 haben also kein gemeinsames Maß, das Verhältnis $\tau : 1 = \tau$ kann nicht als ganzzahliges Verhältnis angegeben werden. τ ist also, nach unserem modernen Sprachgebrauch, eine irrationale Zahl.



Bemerkung : An der Figur erkennt man, daß die unendliche Folge der abgeschnittenen Quadrate das ganze goldene Rechteck mit der Flache τ ausschöpft, d.h. da die Quadrate die Seitenlängen 1, $\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau^2}, \frac{1}{\tau^3}, \ldots$ haben, muß gelten:

$$1 + \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^4} + \frac{1}{\tau^6} + \ldots = \tau$$

Oder in präziser mathematischer Schreibweise: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\tau^{2i}} = \tau$.

Es handelt sich hier um die bekannte geometrische Reihe, für die gilt:

(✶) $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$, sofern nur $|q| < 1$. Mit $q = \frac{1}{\tau^2}$ folgt wegen $|\frac{1}{\tau^2}| < 1$ aus dieser Formel

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\tau^{2i}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\tau^2}} = \frac{\tau^2}{\tau^2 - 1} = \frac{\tau^2}{\tau} = \tau .$$

Bemerkung: Die Summenformel (✶) für die geometrische Reihe ist für die Analysis von erheblicher Bedeutung, so daß man ihre Herleitung kennen sollte. Da der „Trick“ sehr einfach ist, sei er hier kurz vorgeführt:

Wir schreiben die endliche geometrische Summe aus:

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^{n-1} + q^n \qquad = s_n \mid \cdot q$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} q^i = \qquad q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} = s_n q$$

(i) - (ii) liefert: $\quad 1 \qquad - \; q^{n+1} = s_n(1 - q)$

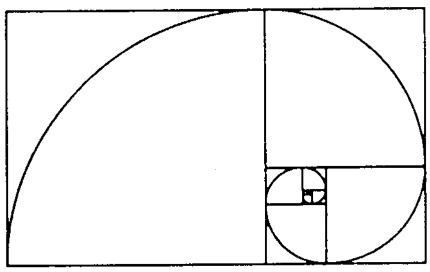
hieraus folgt: $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{1-q}$, falls $|q| < 1$, da dann

$q^{n+1} \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$. QED.

Zeichnet man in die Quadrate der Unterteilung des goldenen Rechtecks bei obiger Abbildung in geeigneter Weise Viertelkreise ein, so erhält man eine Spirale, die sog. **goldene Spirale**, die **unendlich** viele Windungen besitzt, jedoch eine **endliche** Länge hat, nämlich:

$$\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau^3}+\frac{1}{\tau^4}+\quad\ldots\quad\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\tau}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\tau}{\tau-1} = \frac{\pi}{2}\cdot\tau^2 = \frac{\pi}{2}\cdot(\tau+1)$$

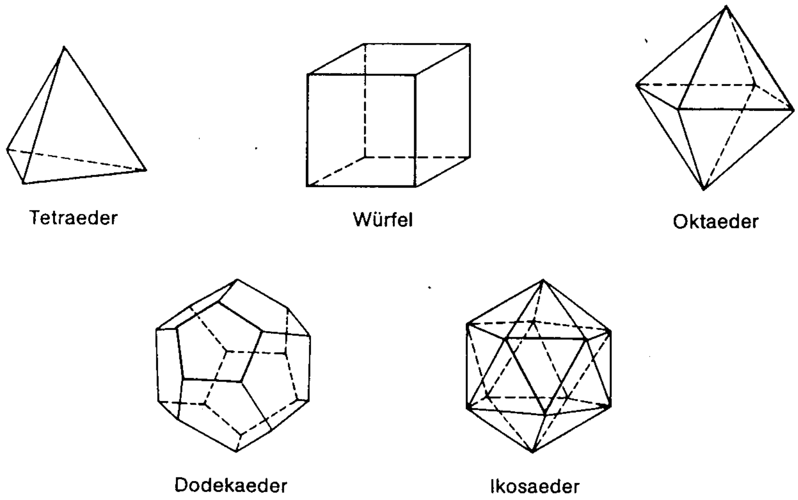
[Kapitel 2, Hilfssatz (ii),(i)].



Bei jeder eingehenderen Untersuchung des goldenen Schnittes darf man nicht versäumen, zumindest ein kurzes Streiflicht auf ein weiteres großes Thema der antiken Geometrie zu werfen, auf die fünf sogenannten **Platonischen Körper**.

Diese regulären Körper wurden schon von EUKLID im 13. Buch seiner **Elemente** behandelt.

Für PLATON spielen sie in seinem *Timaios* eine wichtige Rolle dadurch, daß er vieren dieser Körper die vier antiken Elemente zuordnet, aus denen nach antiker Auffassung der Kosmos besteht, nämlich Erde, Feuer Luft und Wasser. Der fünfte Körper, es ist das Dodekaeder, stellt das gesamte Weltall dar, es ist die „**Quintessenz**“.



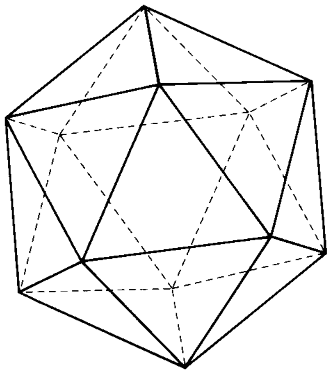
Das besondere Kennzeichen der platonischen Körper ist es, daß ihre Oberflächen aus jeweils kongruenten regulären Vielecken bestehen.
Euklid zeigt, daß es nur diese fünf regulären Körper geben kann.

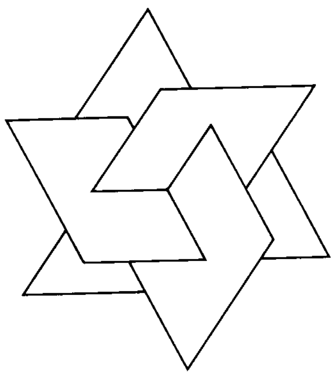
Wir fassen die jeweiligen Charakteristika der fünf platonischen Körper in folgender Tabelle zusammen:

	Anzahl der Flächen an jeder Ecke	Anzahl der Ecken pro Fläche	Gesamtzahl der Ecken	Gesamtzahl der Kanten	Gesamtzahl der Flächen
Tetraeder	3	3	4	6	4
Würfel	3	4	8	12	6
Oktaeder	4	3	6	12	8
Dodekaeder	3	5	20	30	12
Ikosaeder	5	3	12	30	20

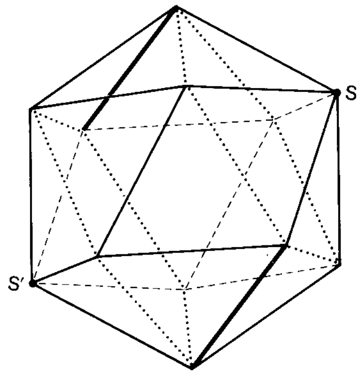
Am Ikosaeder, dem regulären Zwanzigflach, läßt sich der folgende interessante Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt ausmachen:

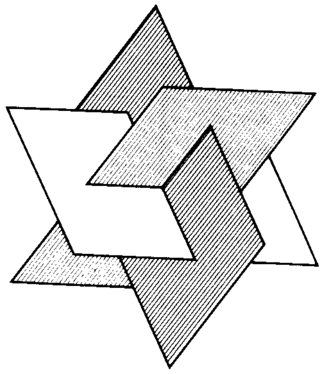
Satz 3: Die zwölf Ecken eines Ikosaeders sind die zwölf Ecken dreier goldener Rechtecke, die paarweise aufeinander senkrecht stehen.





Beweis: Die Dreiecke, die an eine Ecke des Ikosaeders (z.B. S oder S') angrenzen, gehören zu einer Pyramide, deren Basis ein reguläres Fünfeck ist:



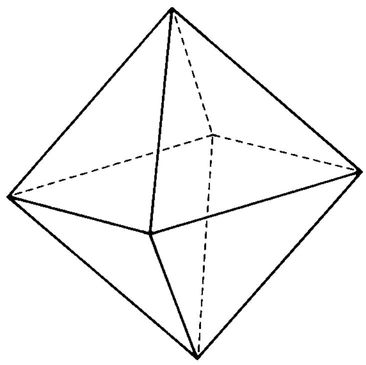


Je zwei gegenüberliegende Kanten des Ikosaeders - wie beispielsweise die fett gezeichneten - gehören zu einem Rechteck, dessen längere Seite Diagonale eines solchen Fünfecks ist. Nach Kapitel 5, Satz (ii) ist das Verhältnis dieser Diagonale - also dieser Rechtecksseite - zur Seite des Fünfecks - also zur Kante des Ikosaeders - gleich τ, so daß das Rechteck ein goldenes ist. In den beiden hierzu senkrechten Ebenen erhält man analog die beiden anderen goldenen Rechtecke.

QED.

Wie sieht es in Bezug auf den goldenen Schnitt mit den anderen platonischen Körpern aus ?

Betrachten wir das Oktaeder



Wie man der Figur entnimmt, gilt:

Die sechs Ecken des **Oktaeders** sind genau die **Ecken dreier paarweise senkrecht aufeinanderstehender Quadrate**. Darüber hinaus gilt beim Oktaeder sogar noch:
Die zwölf Seiten der drei Quadrate sind genau die Kanten des Oktaeders.

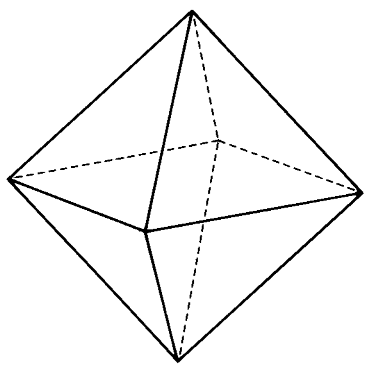
Satz 4: In jedes Oktaeder kann ein Ikosaeder so einbeschrieben werden, daß dessen Ecken die Kanten des Oktaeders im goldenen Schnitt teilen.

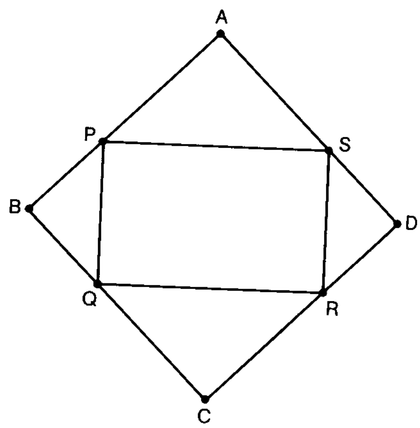
Beweis: Es dürfte den meisten Menschen nicht leicht fallen, sich ein Ikosaeder innerhalb eines Oktaeders plastisch vorzustellen, so daß man geneigt ist, anzunehmen, der Beweis werde relativ aufwendig ausfallen. In Wahrheit haben wir aber lediglich Satz 2 und Satz 3 miteinander zu kombinieren und mit unserer Vorbemerkung über das Oktaeder in Verbindung zu bringen:[9]

Die zwölf Ecken des Ikosaeders sind die Ecken dreier ineinandergesteckter, paarweise senkrechter goldener Rechtecke [Satz 3], die nach obiger Vorbemerkung nun in drei paarweise senkrechte Quadrate einbeschrieben werden sollen.

O.B.d.A. reicht es, das Problem nur in einer der drei Ebenen zu betrachten:

Wir haben dort also ein goldenes Rechteck so in ein Quadrat einzubeschreiben, daß es dessen Kanten im goldenen Schnitt teilt. Daß und wie dies möglich ist, sagt aber gerade der Satz 2 (incl. Beweis).





QED.

Betrachten wir noch einmal die Tabelle auf Seite 22 genauer, werden wir entdecken, daß eine **Dualität** zwischen den Körpern besteht in dem Sinne, daß der eine aus dem anderen hervorgeht, wenn man jeweils die Ecken des einen mit den Flächen des anderen vertauscht.

In diesem Sinne sind Dodekaeder und Ikosaeder sowie Würfel und Oktaeder zueinander **dual**. Das Tetraeder ist zu sich **selbst dual** (bei Vertauschung von Ecken und Flächen geht es in sich selbst über).

Geometrisch bedeutet die Dualität beispielsweise zwischen **Dodekaeder** und **Ikosaeder**, daß die Mittelpunkte der Fünfecksflächen eines Dodekaeders genau die Ecken eines Ikosaeders bilden.

Hieraus folgt aufgrund von Satz 3 sofort:

Satz 5: Die zwölf Mittelpunkte der Fünfecksflächen eines Dodekaeders sind die zwölf Ecken dreier goldener Rechtecke, die in paarweise senkrechten Ebenen liegen.

[9] Man kann an diesem Beispiel übrigens wieder einmal schön den „Triumph" der mathematischen Logik über die (räumliche) Anschauung erkennen.

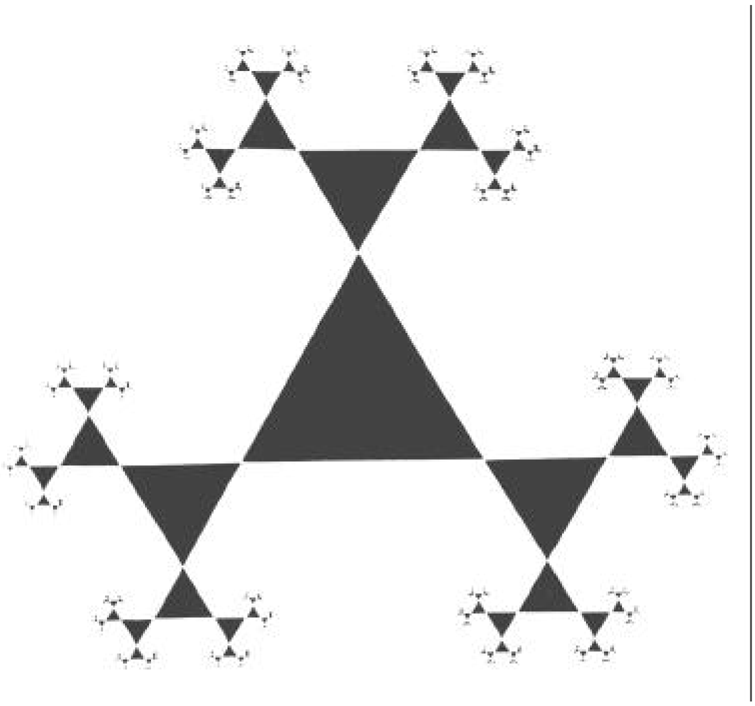
Auch hier zeigt sich wieder die große Überlegenheit allgemeiner Argumentationen. Der Versuch, diesen Satz sich allein durch räumliche Vorstellung plausibel zu machen, dürfte hingegen nicht ganz einfach sein!

Bei unserem Streifzug durch die goldene Geometrie wollen wir auch noch kurz einen Blick auf aktuelle mathematische Entwicklungen werfen.
Wohl kaum ein anderes Gebiet moderner Mathematik ist derzeit so populär wie die Theorie der Fraktale. Erstaunlicherweise begegnet uns auch hier auf mannigfache Weise der goldene Schnitt.

Definition: Unter einem **Fraktal** versteht man eine geometrische Figur, die auf die folgende Weise entsteht:

Ausgangspunkt ist eine einfache geometrische Grundfigur, z.B. ein Dreieck oder ein Quadrat. An die Ecken dieser Figur werden gleichartige Grundfiguren gezeichnet, die um einen bestimmten Faktor $f < 1$ gegenüber der Ausgangsfigur verkleinert sind. An deren freien Ecken wird dieser Vorgang dann wiederholt, und so fährt man ad infinitum fort. Bei jedem Iterationsschritt erhält man auf diese Weise immer feinere Verästelungen.

Das folgende Bild zeigt ein Dreiecksfraktal, das aus gleichseitigen Dreiecken gebildet wurde:

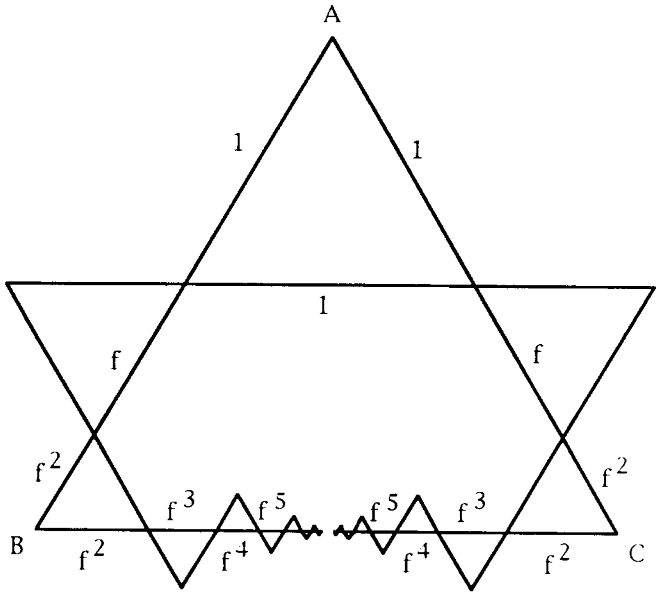


Bei diesem Fraktal wurde der Verkleinerungsfaktor $f = \frac{1}{2}$ gewählt.

Man sieht deutlich, daß die Äste dieses Dreieckfraktals einen relativ großen **Zwischenraum** offen lassen.
Es erhebt sich daher die interessante Frage, wie groß wir wohl den Verkleinerungsfaktor $f < 1$ wählen müssen, damit sich die einzelnen Zweige gerade **berühren**, aber noch nicht überlappen.

Aus Gründen der Symmetrie reicht es, nur einen Berührungspunkt zu betrachten. Wir wählen den Punkt direkt in der Mitte unterhalb des Ausgangsdreiecks, dessen Seitenlänge wir o.B.d.A. als 1 voraussetzen, und betrachten die beiden Dreiecksfolgen, die sich von links und rechts diesem Punkt nähern und sich im Grenzfall dort berühren sollen.
Die iterierten Dreiecke haben dann die Seitenlängen $f, f^2, f^3, f^4, \ldots$
Der Figur entnimmt man, daß die Bedingung der Berührung der beiden Dreiecksfolgen in der Mitte gerade die Gültigkeit folgender Gleichung bedeutet:

$$\frac{1}{2} + \frac{f}{2} = \frac{f^2}{2} + f^3 + f^4 + f^5 + \ldots$$



Obige Gleichung ist äquivalent zu

$$1 + f = f^2 + 2f^3 \cdot (1 + f + f^2 + f^3 + \ldots) = f^2 + \frac{2f^3}{1-f}$$ [Summenformel (✶) für die geometrische Reihe] .

Hieraus ergibt sich die kubische Gleichung: $f^3 + 2f^2 - 1 = 0$

Die eine Lösung $f_1 = -1$ läßt sich unschwer erraten.

Division durch den zugehörigen Linearfaktor $(f + 1)$ liefert für die übrigen Lösungen die quadratische Gleichung:

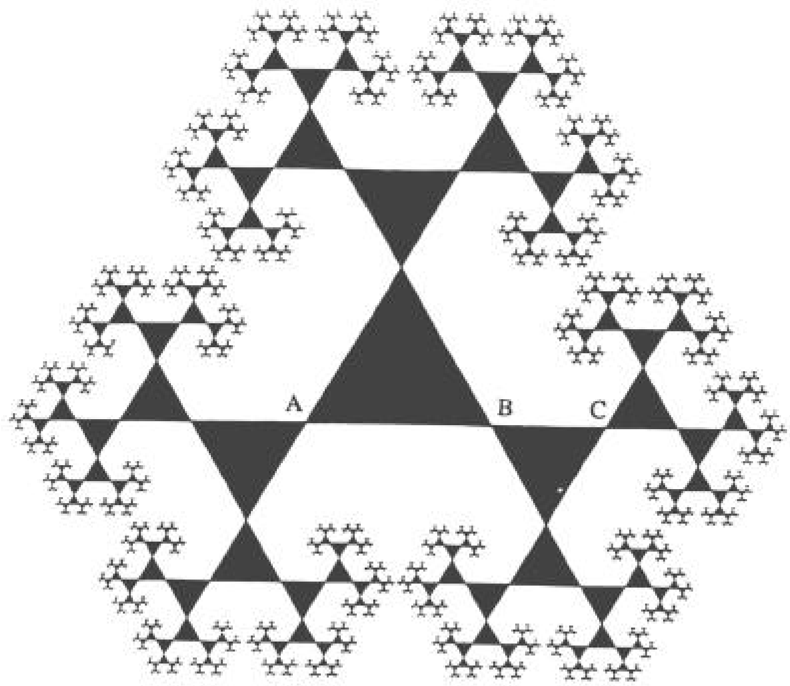
$$f^2 + f - 1 = 0$$

mit den Lösungen $f_2 = -\tau$ und $f_3 = \frac{1}{\tau}$.

Die einzige positive Lösung der kubischen Gleichung ist also $f = \frac{1}{\tau}$.

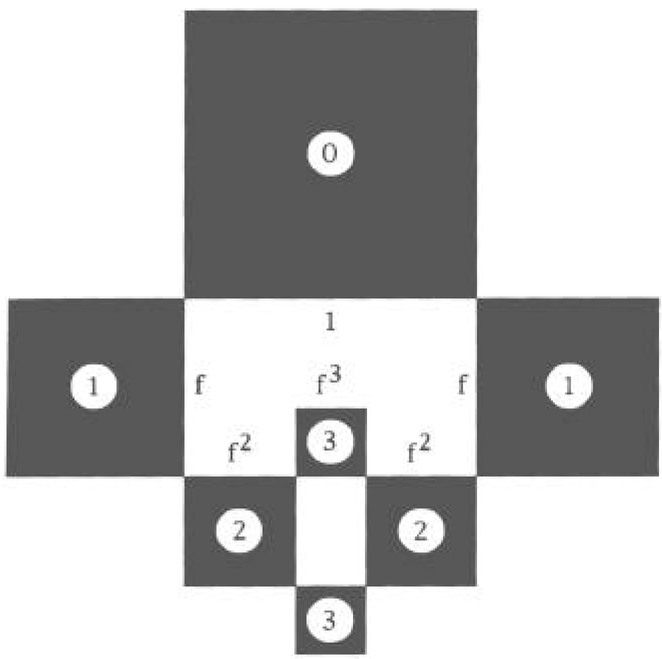
Wir haben also das „schöne" Ergebnis erhalten:

Satz 6: Bei Verkleinerung im Verhältnis des goldenen Schnittes ($f = \frac{1}{\tau}$) berühren sich gerade die einzelnen Äste eines Dreiecksfraktals.



Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir allein die Ästhetik einiger Fraktale genießen, die alle einen Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt aufweisen.

Das **goldene Quadratfraktal**, das nach folgendem Iterationsprinzip aufgebaut ist:

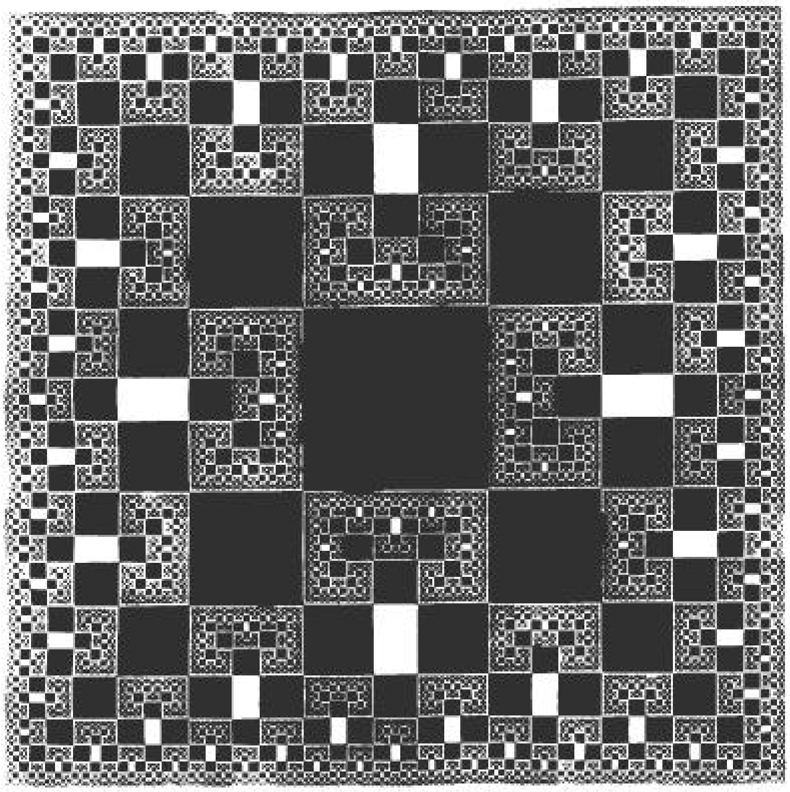


Für den Verkleinerungsfaktor ergibt sich - gemäß Figur - die Bedingung

$$1 = 2f^2 + f^3 .$$

Es ist dieselbe kubische Gleichung, die wir vom goldenen Dreiecksfraktal schon kennen und die die einzige positive Lösung $f = \frac{1}{\tau}$ besitzt.

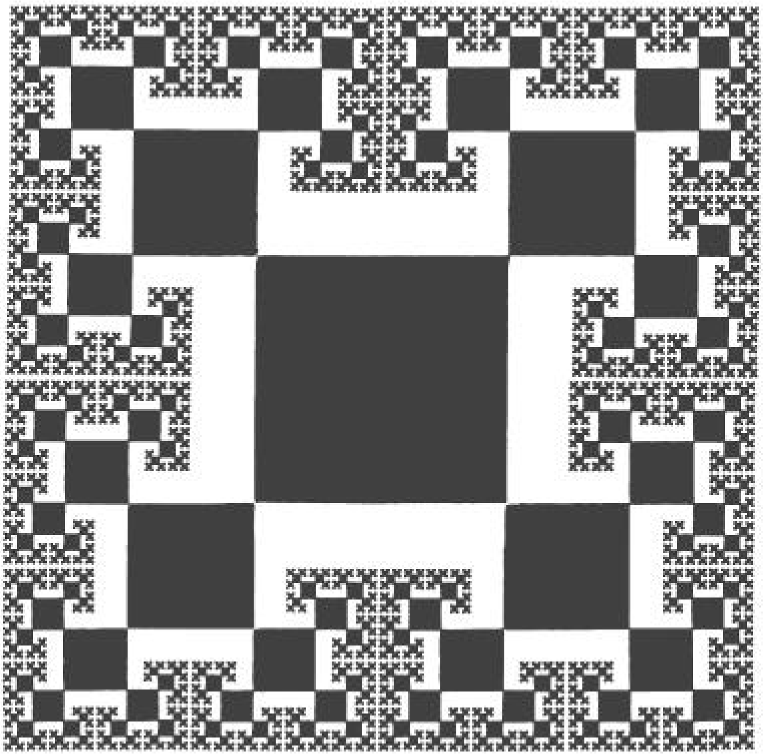
Das **goldene Quadratfraktal** hat folgendes Aussehen:



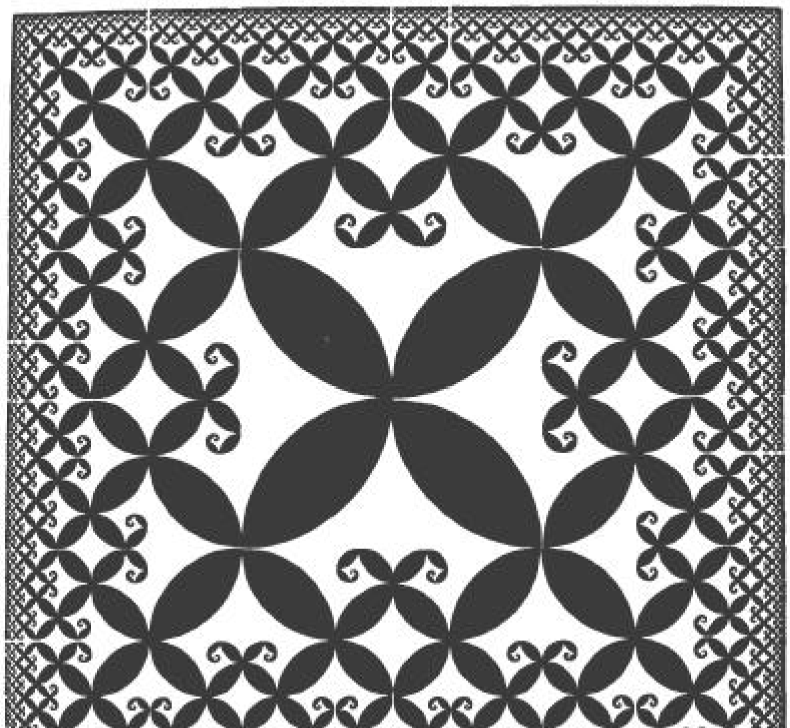
Die ausgesparten weißen Rechtecke sind golden.

Auch bei diesem Fraktal berühren sich die einzelnen Äste, so daß in diesem „Teppichmuster“ keine „Zwischenräume“ (Räume ohne Muster) frei bleiben.

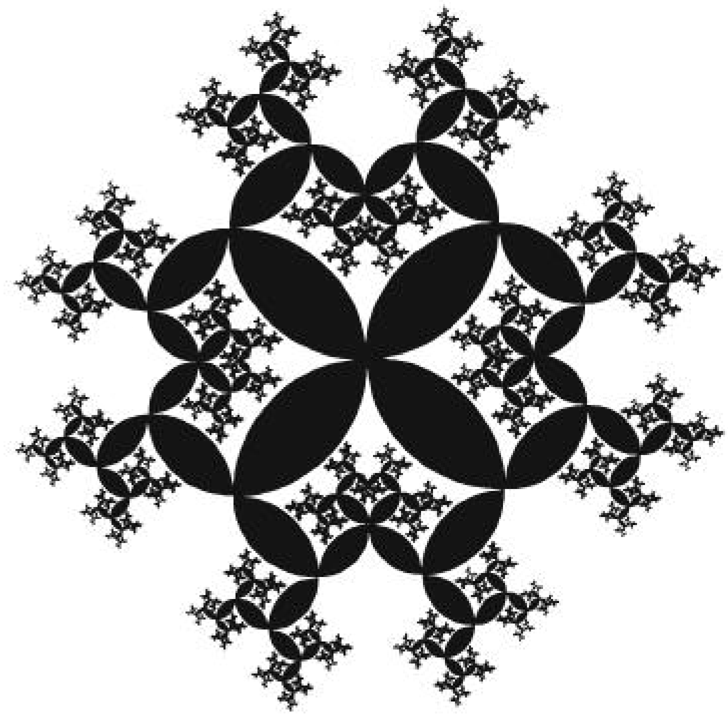
Der Vergleich mit dem Quadratfraktal mit Verkleinerungsfaktor $f = \frac{1}{2}$, bei dem es diese „Zwischenräume“ gibt, zeigt sehr deutlich, daß das „kompaktere“ goldene Fraktal ästhetisch ansprechender ist:



Sehr ansprechend ist auch die **Variante des goldenen Quadratfraktals**, die man erhält, indem man die entsprechenden Kreiszweiecke in die Quadrate einzeichnet:



Zum Abschluß genießen wir ein **Fraktal mit goldenen Spiralen:**



Trinkt, ihr Augen, was die Wimper hält,
von dem goldnen Überfluß der Welt!

G. KELLER

8. Der goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen

In Kapitel 2 (Seite 4) hatten wir versprochen, noch einmal genauer auf die bemerkenswerte Eigenschaft der **goldenen Schnittzahl τ** zurückzukommen, daß sie es nämlich gestattet, alle ihre positiven und negativen Potenzen in **linearer Form** $a\tau + b$ mit geeigneten ganzzahligen a und b zu schreiben.

Gemäß Kapitel 2, Hilfssatz (i) gilt ja für τ die definierende Gleichung: $\tau^2 = \tau + 1$.

Hieraus ersieht man, daß das Quadrat von τ **linearisierbar** ist, eben durch $\tau + 1$.

Untersuchen wir weiter: $\tau^3 = \tau^2 + \tau$ [Multiplikation von $\tau^2 = \tau + 1$ mit τ].

Durch Einsetzen von $\tau + 1$ in τ^2 erhalten wir die **Linearisierung:**

$$\tau^3 = (\tau + 1) + \tau = 2\tau + 1 .$$

Allgemein erhalten wir aus der Grundgleichung $\tau^2 = \tau + 1$ durch Multiplikation mit τ^n ($n \in \mathbb{N}$)[10] die **Rekursionsgleichung:**

$$\boxed{\tau^{n+2} = \tau^{n+1} + \tau^n .}$$

Kennt man die linearen Ausdrücke für τ^n und τ^{n+1}, so kann man den linearen Ausdruck für die nächste Potenz τ^{n+2} einfach erzeugen durch Addition.

Mit Hilfe dieser Rekursionsgleichung erhalten wir sukzessive die Linearisierungen der Potenzen von τ :

$\tau^1 = \tau \qquad = \tau$

$\tau^2 = \tau + 1 \qquad = \tau + 1$

$\tau^3 = \tau^2 + \tau \qquad = 2\tau + 1$

$\tau^4 = \tau^3 + \tau^2 \qquad = 3\tau + 2$

$\tau^5 = \tau^4 + \tau^3 \qquad = 5\tau + 3$

$\tau^6 = \tau^5 + \tau^4 \qquad = 8\tau + 5$

....

Wie man sofort erkennt, ist die neue Zeile jeweils die Summe der beiden vorhergehenden. Diese Linearisierung der Potenzen des goldenen Schnitts τ war schon LEONHARD EULER[11] bekannt.

---

[10] Das Symbol IN bedeutet die Menge der natürlichen Zahlen = $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

[11] 1707 (Basel) - 1783 (St. Petersburg). Großer Mathematiker, der den größten Teil seines Lebens an der von der Kaiserin KATHARINA I. gegründeten Wissenschaftlichen Akademie in St. Petersburg verbrachte. Er war einer der fleißigsten Mathematiker, die je gelebt haben. Sein Œvre umfaßt über 600 bedeutende Veröffent-

Die Potenzen von τ lassen sich also schreiben in der Form

$\tau^n = a_n \tau + a_{n-1}$ mit $n \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Für die ganzen Zahlen a_n gilt offensichtlich die **Rekursion**:

$$\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ mit den Startwerten } a_1 = a_2 = 1}$$

Die hierdurch rekursiv - man sagt auch induktiv - definierte Zahlenfolge ist in der Mathematik sehr berühmt. Sie heißt die **Fibonacci-Folge**[12].

Ihre ersten Folgenglieder lauten: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, . . .

Die Fibonacci-Zahlen treten also bei der Linearisierung der Potenzen von τ auf.

Da nach Kapitel 2, Hilfssatz (ii) gilt $1/\tau = \tau - 1$, erhält man mit $\tau^2 = \tau + 1$:
$\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 = (\tau - 1)^2 = \tau^2 - 2\tau + 1 = (\tau + 1) - 2\tau + 1 = -\tau + 2 = (-\frac{1}{\tau} - 1) + 2 = -\frac{1}{\tau} + 1$, so daß wir haben:

$$\left(-\frac{1}{\tau}\right)^2 = (-\frac{1}{\tau}) + 1$$

Diese Gleichung geht aus der Gleichung $\tau^2 = \tau + 1$ hervor, indem man τ durch $-\frac{1}{\tau}$ ersetzt, so daß die gleiche obige Argumentation auch für $-\frac{1}{\tau}$ gelten muß und wir auch für die Potenzen von $-\frac{1}{\tau}$ die Linearisierungsformel

$\left(-\frac{1}{\tau}\right)^n = a_n(-\frac{1}{\tau}) + a_{n-1}$ für $n \in \{2, 3, 4, 5, \cdots\}$ erhalten mit der Fibonacci-Folge (a_n).

Kombiniert man diese Formel mit der Linearisierung $\tau^n = a_n \tau + a_{n-1}$, erhält man sofort

---

lichungen aus Analysis, Algebra, Geometrie und Mechanik. Trotz völliger Erblindung im Jahr 1766 publizierte er noch zahlreiche Arbeiten, die er seinem Diener, einem Berliner Schneidergesellen, diktierte. EULER schrieb seine Werke in einer didaktisch so hervorragenden Weise, daß dieser Schneidergeselle - angeblich - alles genau verstanden und schließlich selber ein mathematisch recht gebildeter Laie geworden sein soll.

[12] Nach Fibonacci = Filius Bonacci = Sohn des Bonacci. Sein eigentlicher Name war LEONARDO VON PISA. Geboren wurde er zwischen 1170 und 1180 in Pisa. Sein Todesjahr ist unbekannt. Auf ausgedehnten Reisen nach Algerien, Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien und in die Provence lernte er alle damals bekannten Rechenverfahren kennen. 1202 veröffentlichte er ein epochemachendes 459 Seiten starkes mathematisches Werk, den **Liber Abbaci**. Dieses Lehrbuch wurde ein Markstein in der Entwicklung der Mathematik des Mittelalters. Hier wird u.a. erstmalig konsequent die indisch-arabische Ziffernschreibweise verwendet. Er hatte Zugang zu den Kreisen des Kaisers FRIEDRICH II., der ihm die Aufgabe gestellt haben soll, eine Quadratzahl zu finden, die bei Addition und Subtraktion von 5 wieder Quadratzahlen liefert.

$$\tau^n - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^n = a_n\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right) = a_n\sqrt{5}$$ [Kapitel 2, Hilfssatz (iii)] .

Hieraus ergibt sich eine geschlossene Formel für die Fibonacci-Zahlen:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^n - \left(-\frac{1}{\tau}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

Diese Formel wird die **Binet-Formel**[13] genannt. Bemerkenswert an ihr ist, daß sich für jedes natürliche n die irrationalen Terme gegenseitig so aufheben, daß stets eine natürliche Zahl „zum Vorschein“ kommt.

Wir erkennen weiter: Die Fibonacci-Folge ist die Differenz zweier **geometrischer Folgen**[14] mit den Quotienten τ respektive $-\frac{1}{\tau}$.

Da nun $|-\frac{1}{\tau}| < 1$ ist, ist die Folge $-(-\frac{1}{\tau})^n$, $n \in$ IN, eine Nullfolge, so daß wir für *große n* die folgende **Approximation für die Fibonacci-Zahlen** haben:

$$\boxed{a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\tau^n \quad \text{für große n.}}$$

Die Fibonacci-Zahlen werden also immer genauer durch Potenzen des goldenen Schnitts angenähert, je größer sie werden.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \tau}$$

Der goldene Schnitt läßt sich also umgekehrt auch aus den Fibonacci-Zahlen gewinnen, nämlich nach der letzten Formel als Approximation durch die Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen.

Die folgende kleine Tabelle illustriert diese Annäherung bis zum sechsten Iterationsschritt:

$a_1 = 1$	$f_1 := a_2/a_1 = 1$
$a_2 = 1$	$f_2 := a_3/a_2 = 2$

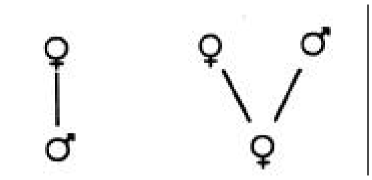
[13] JACQUES PHILIPPE MARIE BINET. 1786 (Rennes) - 1856 (Paris). Physiker, Astronom, Mathematiker. Er lehrte an der Pariser Ecole Polytechnique, wo er vom Lehrer bis zum Professor für Mechanik aufstieg. Die nach ihm benannte Formel soll aber schon 1718 von ABRAHAM DE MOIVRE (1667 - 1754) entdeckt worden sein. Dieser war ein hochgebildeter mathematischer Autodidakt, der sich bis ins hohe Alter seinen Lebensunterhalt durch mathematischen Privatunterricht sowie durch profunde mathematische Beratung von Spielern und Spekulanten der damaligen Londoner High Society verdiente. Er hat wesentlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeits-theorie beigetragen. Exakt bewiesen hat die Formel zehn Jahre später NIKOLAUS BERNOULLI (1687 - 1759).

[14] Eine Folge (a_n) heißt eine **geometrische Folge**, wenn sie die Gestalt $a_n = q^n$ hat, wenn also zwei aufeinanderfolgende Glieder stets den gleichen Quotienten haben: $a_{n+1}/a_n = q$.

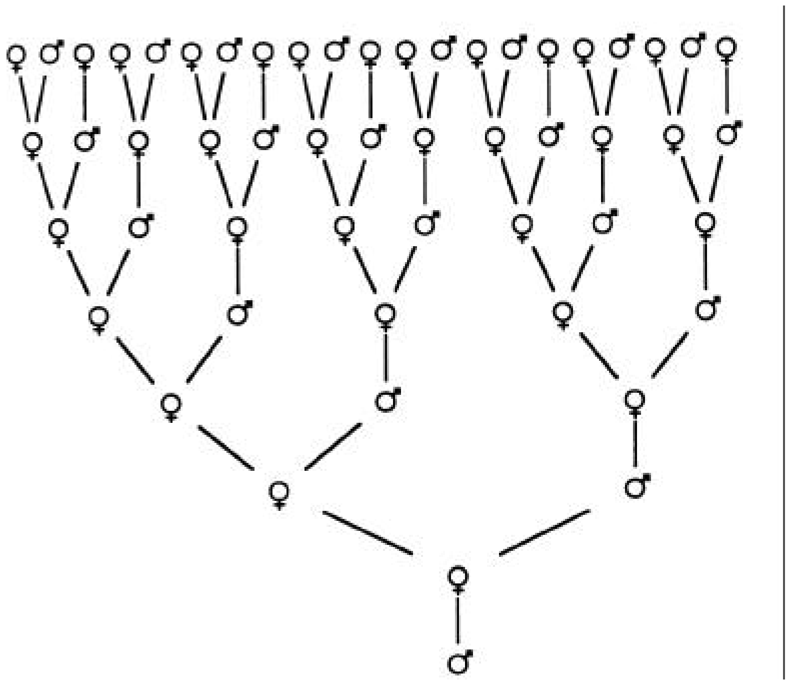
$a_3 = 2$	f_3: $= a_4/a_3 = 3/2 = 1{,}5$
$a_4 = 3$	f_4: $= a_5/a_4 = 5/3 = 1{,}666$
$a_5 = 5$	f_5: $= a_6/a_5 = 8/5 = 1{,}6$
$a_6 = 8$	f_6: $= a_7/a_6 = 13/8 = 1{,}625$

In der **Biologie** begegnet uns die Fibonacci-Folge ganz konkret bei den **Bienen**. Hier schlüpfen bekanntlich die männlichen Bienen, die sog. **Drohnen**, aus dem *unbefruchteten* Ei einer Bienenkönigin, während aus den befruchteten Eiern die Königinnen oder die weiblichen Arbeitsbienen schlüpfen. Welche weibliche Biene Königin wird, hängt von der Ernährung ab. Eine Drohne hat also nur ein mütterliches Elternteil, während eine Königin zwei Elternteile hat.

Der Stammbaum einer Drohne hat daher das folgende Aussehen:



Drohne Königin

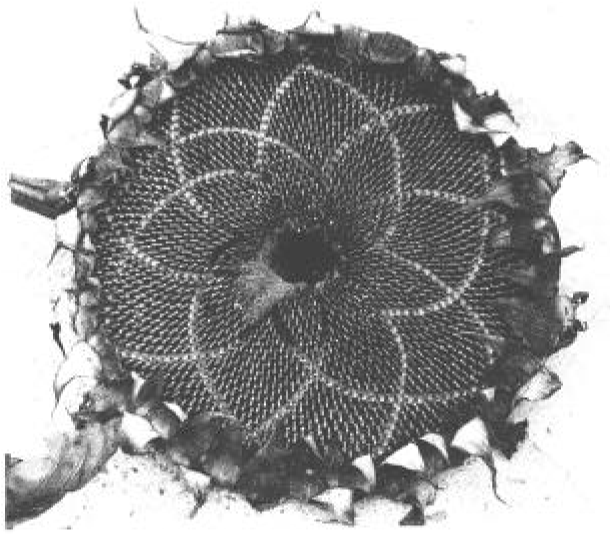


Dieser Stammbaum ist asymmetrisch, da die Anzahl der Weibchen bei den Drohnen-Vorfahren überwiegt.

Für die n-te Elterngeneration ($n \in \mathbb{N}$) einer Drohne ergeben sich a_n Weibchen und a_{n-1} Männchen, wobei mit (a_n) wieder die Fibonacci-Folge bezeichnet sei.

Da wir hier nun schon bei der **Biologie** gelandet sind, sei noch ein weiteres Beispiel aus der Natur angeführt, an dem man die Fibonacci-Zahlen, und damit auch den goldenen Schnitt,

recht gut beobachten kann. Bei den **Sonnenblumen** kann man sehr schön erkennen, daß ihre Kerne in spiralförmigen Linien angeordnet sind.
Jeder Kern gehört zu genau einer links-drehenden und zu genau einer rechts-drehenden Spirallinie.

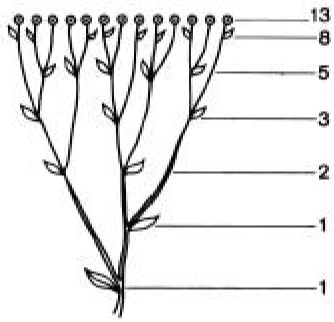


Zählt man alle **linksdrehenden Spiralen** bei einer beliebigen **Sonnenblume**, so erlebt man eine Überraschung: Man erhält interessanterweise bei genauer Zählung stets **Fibonacci-Zahlen**.
Werte, die man in der Natur beobachten kann, sind z.B. 21, 34, 55, 89, 144 oder auch noch 233 linksdrehende Spirallinien in einer Sonnenblumen-Blüte.
Zählt man auch noch die Anzahl der **rechtsdrehenden Spiralen**, so erhält man stets auch wieder eine Fibonacci-Zahl. Bei ein und derselben Sonnenblumen-Blüte erhält man jedoch interessanterweise nicht die gleiche Fibonacci-Zahl, sondern stets eine benachbarte.

Bei der Sonnenblume ist das jeweilige Verhältnis aus links- und rechtsdrehenden Spirallinien in der Blüte also eine hervorragende Annäherung an den goldenen Schnitt.

Macht man sich die Mühe des Zählens bei unserem Bild - vielleicht unter Zuhilfenahme einer Lupe - , so kann man 55 links- und 89 rechtsdrehende Spiralen erkennen. Im Bild wurde jede zehnte Spirale hervorgehoben.

In der Botanik kann man noch viele Beispiele für das Auftreten von Fibonacci-Zahlen, und damit auch vom goldenen Schnitt, entdecken, wie auch das folgende Beispiel zeigt, bei dem es sich um die Skizze einer **Nießwurz** handelt:

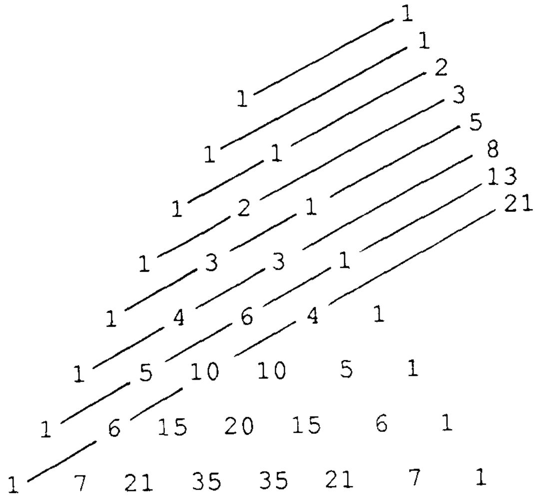


Kommen wir zum Abschluß noch einmal auf die Mathematik zurück. Auch hier lassen sich die **Fibonacci-Zahlen** an so vielen Stellen **entdecken**, daß man sogar eine Zeitschrift herausgegeben hat, die vierteljählich erscheint und sich außschließlich mit dem Studium dieser Zahlen beschäftigt, das *Fibonacci Quarterly*. Bislang ist dieser Zeitschrift der wissenschaftliche Stoff noch nicht ausgegangen!

Eine hübsche Entdeckung ist beispielsweise das Auftauchen der Fibonacci-Zahlen im berühmten **Pascal-Dreieck**, das bekanntlich rekursiv so aufgebaut ist, daß die Randzahlen aus lauter Einsen bestehen und jede Zahl im Innern des Dreiecks sich als Summe der direkt darüberstehenden Zahlen ergibt. Das Zahlendreieck ist dann symmetrisch (zu seiner Mittel-senkrechten) und in den Zeilen stehen jeweils die **Binomialkoeffizienten**, wobei man hier bei Null zu zählen beginnt. Schaut man sich also die 2-te Zeile an, so erhält man die Binomialkoeffizienten von $(a + b)^2 = \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$. Diese Formel kennen wir aus längst vergangenen Schultagen als binomische Formel.
Oder etwas anspruchvoller: In der 7-ten Zeile stehen die Zahlen 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, so daß wir die Binomialentwicklung von $(a + b)^7$ sofort hinschreiben können:

$$(a + b)^7 = \mathbf{1}a^7 + \mathbf{7}a^6 b + \mathbf{21}a^5 b^2 + \mathbf{35}a^4 b^3 + \mathbf{35}a^3 b^4 + \mathbf{21}a^2 b^5 + \mathbf{7}a\, b^6 + \mathbf{1}b^7 .$$

Die **Fibonacci-Zahlen** erkennt man nun im Pascal-Dreieck als Schrägzeilen-Summen, wie es in folgender Figur dargestellt ist:



Auf S. 33 hatten wir gesehen, daß die Folge $f_n := a_{n+1}/a_n$ der Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen den goldenen Schnitt τ konvergiert.

Aufgrund der Rekursionsgleichung $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ folgt nach Division durch a_n :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

so daß wir für die Quotientenfolge die Rekursionsgleichung

$$\boxed{f_n = 1 + \frac{1}{f_{n-1}} \quad ; \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2}$$

haben.
Aus dieser Rekursionsgleichung ergibt sich mit dem Startwert $f_1 = 1$ induktiv:

$f_1 = 1$;

$$f_2 = 1 + \frac{1}{f_1} = 1 + \frac{1}{1} \ ;$$

$$f_3 = 1 + \frac{1}{f_2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} \ ;$$

$$f_4 = 1 + \frac{1}{f_3} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$$

usw.

Weil nun $\lim_{n\to\infty} f_n = \tau$ ist, läßt sich der goldene Schnitt τ als ein unendlicher Kettenbruch darstellen, der aus lauter Einsen besteht. Es ist der einfachste - und damit vielleicht schönste - Kettenbruch, den man sich vorstellen kann:

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}$$

Man kann sich mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus (Siehe S. 18f) überlegen, daß jede **rationale** Zahl sich als ein **endlicher**, d.h. abbrechender, **Kettenbruch** schreiben läßt. Wir erkennen also auch hieran noch einmal die Irrationalität des goldenen Schnittes τ .

Es läßt sich der folgende Fundamentalsatz aus der Theorie der Kettenbrüche beweisen:

Satz: Jede reelle Zahl läßt sich in eindeutiger Weise als Kettenbruch darstellen, und umgekehrt ist jeder Kettenbruch konvergent, so daß er eine relle Zahl darstellt. Der zugehörige Kettenbruch ist genau dann endlich, wenn die Zahl rational ist (d.h. auch, er ist genau dann unendlich, wenn die Zahl irrational ist).

Man könnte also die Theorie der rellen Zahlen über die Kettenbrüche aufbauen.[15] Historisch gesehen, haben die Kettenbrüche in der Tat im 17. Jahrhundert eine wichtige Rolle bei der Untersuchung irrationaler Zahlen gespielt.

Auch $\sqrt{2}$ besitzt eine einfache Kettenbruchentwicklung, wie man an der folgenden „trickreichen“ Umformung erkennt:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{2}+1}{2-1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{1+\left(1+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$ usw., d.h. für $\sqrt{2}$ im Kettenbruch wird jeweils der vorhergehende Kettenbruch eingesetzt, so daß man schließlich erhält:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

[15] Vgl. hierzu etwa das schöne Buch: O. PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I, Stuttgart 1954.

Wie es Kettenbrüche gibt, so gibt es auch **Kettenwurzeln**.

Als Übungsaufgabe möge der Leser selber beweisen, daß auch hier der goldene Schnitt sich dadurch auszeichnet, die einfachste Kettenwurzel-Darstellung zuzulassen, nämlich:

$$\boxed{\tau = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}$$

Hinweis: Man betrachte die Rekursion: $w_{n+1} = \sqrt{1+w_n}$ und bilde auf beiden Seiten den Grenzwert, den man hier als existent voraussetzen darf (was man streng genommen erst zeigen muß. Wie das geht, lernt man in jedem **Analysis-Kurs**). Man mache sich klar, daß für diesen Grenzwert w die Gleichung $w = \sqrt{1+w}$ gelten muß (hierbei darf man die Gültigkeit von $\lim \sqrt{1+w_n} = \sqrt{1+\lim w_n}$ benutzen, die auch in der **Analysis** bewiesen wird).

Die folgenden beiden Bilder zeigen zwei berühmte Beispiele aus der Architektur zum goldenen Schnitt.

Zunächst das **Parthenon** in Athen, das Perikles in den Jahren 447 - 432 v. Chr. bauen ließ. Die Vorderfront stellt ziemlich genau ein **goldenes Rechteck** dar.

Ein besonders interessantes Beispiel für den goldenen Schnitt in der Architektur stellt der **Dom in Florenz** dar, dessen Baumeister BRUNELLESCHI (1377 - 1446) seine Kuppel so gestaltete, daß ihre Gesamthöhe sich zur Höhe des Ansatzes der Kuppelwölbung verhält wie die beiden Zahlen 144 : 89, also wie $a_{12} : a_{11}$ (= f_{11}), was dem goldenen Schnitt schon sehr nahe kommt.

Literatur

BARAVALLE, H.V.: Die Geometrie des Pentagramms und der Goldene Schnitt. Stuttgart 1950.

BEUTELSPACHER, A./PETRI, B: Der Goldene Schnitt. Mannheim 1988.

CANTOR, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1900.

COXETER, H.S.M.: Unvergängliche Geometrie. Basel 1981.

EUKLID: Die Elemente. Buch I - XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Darmstadt 1991.

HELLER, S.: Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoräer. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Klasse für Mathematik, Physik und Technik Nr. 6. Berlin 1958.

LAUGWITZ, D.: Die Quadratwurzel aus 5, die natürlichen Zahlen und der Goldene Schnitt. Jahrbuch Überblicke Mathematik 1975.

SCHARK, R.: Konstanten in der Mathematik - variabel betrachtet. Frankfurt a.M. 1992.

SZABO, A.: Anfänge der griechischen Mathematik. München/Wien 1969.

TROPFKE, J.: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1 Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Berlin 1980.

WALSER, H.: Der Goldene Schnitt. Stuttgart/Leipzig 1993.